Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de R

Algebra Vectorial

Ilustración basada en un fragmento de la obra "Mujeres en la playa", de Luis Seoane.

3º AÑO

Cod. 1301 - 14

Prof. Noemí Lagreca
Prof. Mirta Rosito
Prof. Susana Strazziuso

Matemática

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

I- Introducción

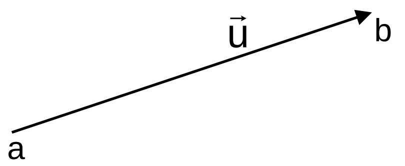
En diversas oportunidades nos hemos encontrado en temas relacionados con la Física, con magnitudes que quedan definidas mediante un número, las denominadas ***magnitudes escalares***. Entre ellas, podemos citar la longitud, la masa, el volumen. Otras, en cambio, **las magnitudes vectoriales**, requieren además del número, para su definición, de elementos tales como dirección y sentido representados por segmentos orientados o flechas denominados **vectores**. Se cuenta entre estas últimas magnitudes, como ejemplo, las fuerzas, los desplazamientos, las velocidades, etc.

II- Vector

II-1- Definición. Sus elementos

Se llama vector a todo segmento orientado, es decir, a todo segmento determinado por un par ordenado (a; b) de puntos. El punto *a* se llama origen y el punto *b* extremo del vector.

Para simbolizarlo usaremos $\overrightarrow{ab}$ o simplemente $\vec{u}$



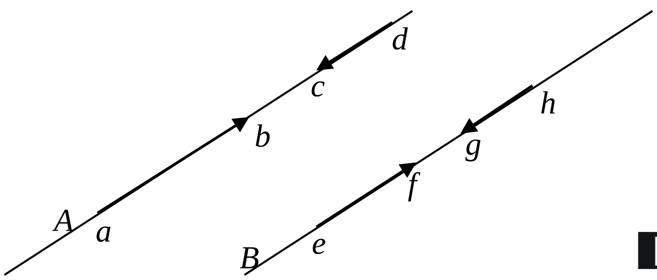
Los elementos de un vector son tres, a saber:

- **Dirección**

  La *dirección* de un vector está dada por la recta que lo contiene o cualquiera de sus paralelas.

- **Sentido**

  La orientación del vector sobre la recta, definida por su origen y su extremo, determina el *sentido* del mismo.
  En cada dirección hay dos sentidos.
  Gráficamente el sentido de un vector es indicado con una flecha.



En la figura, los vectores $\overrightarrow{ab}; \overrightarrow{dc}; \overrightarrow{ef}$ y $\overrightarrow{hg}$ tienen la misma dirección pues están sobre las rectas paralelas *A* y *B*. Los vectores $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{ef}$ tienen igual sentido y los vectores $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{hg}$ tienen distinto sentido.

- **Módulo**

El *módulo* es la medida del segmento orientado.

El módulo de un vector $\overrightarrow{ab}$ se simboliza $\left|\overrightarrow{ab}\right|$

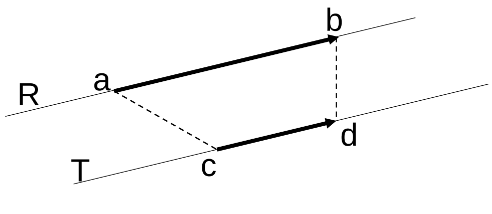
Por todo lo precedente, podemos decir que el *módulo de un vector* es siempre un número *no negativo*, o sea

$$|\vec{u}| \geq 0 \quad \forall \vec{u}$$

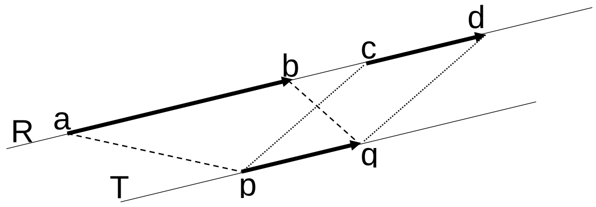
Algunas definiciones:

∗ Diremos que dos vectores $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{cd}$ poseen:

- *Igual módulo:* si la medida de los segmentos ab y cd son iguales, respecto a la misma unidad de medida.
- *Igual dirección:* si ambos vectores están contenidos en la misma recta o rectas paralelas.
- *Igual sentido:*
  - si teniendo la misma dirección e incluidos en rectas paralelas no coincidentes, los segmentos $\overline{ac}$ y $\overline{bd}$ no tienen ningún punto en común.

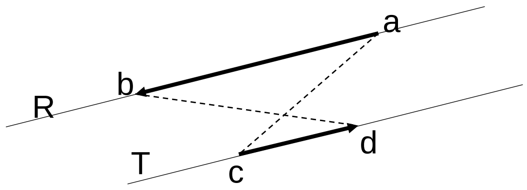


- si teniendo la misma dirección e incluidos en la misma recta, existe un vector $\overrightarrow{pq}$ no incluido en dicha recta, que tiene igual sentido que $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{cd}$.

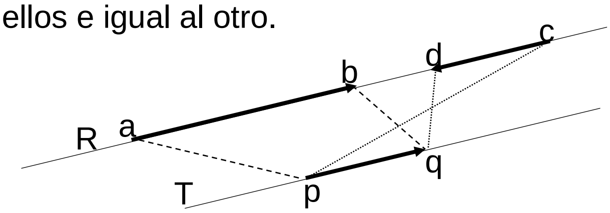


- ***Distinto sentido o sentido opuesto**:*

  - si teniendo la misma dirección e incluidos en rectas paralelas no coincidentes $\overrightarrow{ac}$ y $\overrightarrow{bd}$ se intersecan en un punto los segmentos $\overrightarrow{bd}$ y $\overrightarrow{ac}$



  - si teniendo la misma dirección e incluidos en la misma recta, existe un vector $\overrightarrow{pq}$ no incluido en dicha recta, que tiene sentido opuesto a uno de ellos e igual al otro.



∗ Dado un segmento ab, se llama **vector libre** $\overrightarrow{ab}$ al conjunto de todos los vectores que tienen igual módulo, dirección y sentido que $\overrightarrow{ab}$, incluido el propio $\overrightarrow{ab}$. En lo sucesivo será indistinto trabajar con cualquiera de los elementos de dicho conjunto.

II-2- Vector nulo

Llamaremos ***vector nulo*** a todo punto y lo notaremos $\vec{o}$

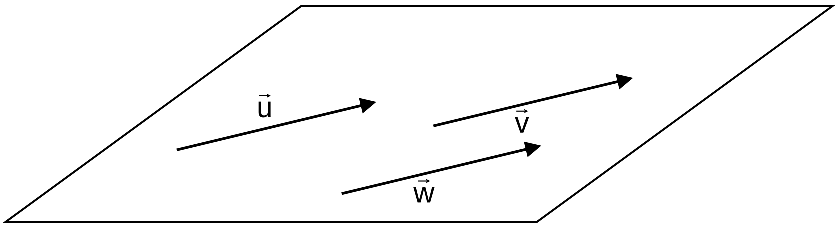
El vector nulo es el único que tiene módulo cero y que no tiene definido ni dirección ni sentido.

II-3- Vectores iguales

Dos vectores son iguales cuando son nulos o tienen igual módulo, dirección y sentido. En símbolos:

$$\vec{u}=\vec{v} \iff \vec{u}=\vec{v}=\vec{o} \vee \begin{cases} |\vec{u}|=|\vec{v}| \\ \text{direc. }\vec{u}=\text{direc. }\vec{v} \\ \text{sent. }\vec{u}=\text{sent. }\vec{v} \end{cases}$$

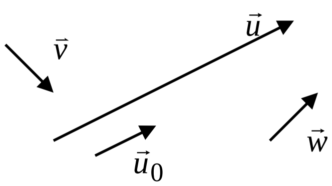
Ejemplo:



$$\vec{u}=\vec{v}=\vec{w}$$

II-4- Versor. Versor asociado

Se llama *versor* o *vector unitario* a cualquier vector de módulo uno.



$$|\vec{v}|=|\vec{w}|=|\vec{u}_0|=1 \iff \vec{v};\ \vec{w} \text{ y } \vec{u}_0 \text{ son versores}$$

Para tener en cuenta: $\vec{u}_0$ por tener el mismo sentido que $\vec{u}$ recibe el nombre de ***versor asociado*** a $\vec{u}$

II-5- Vector opuesto

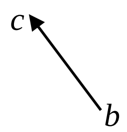
Dado un vector cualquiera $\vec{a}$, se llama vector opuesto de $\vec{a}$ y se simboliza $-\vec{a}$, al $\vec{b}$ tal que:

$$\vec{b} = -\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{b} = \vec{o} & \text{si} \quad \vec{a} = \vec{o} \\ & \vee \\ \vec{b} \neq 0 \ ; \ \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \,//\, \vec{b} \\ \text{sent}\,\vec{a} \neq \text{sent}\,\vec{b} \end{cases} & \end{cases}$$

Para resolver

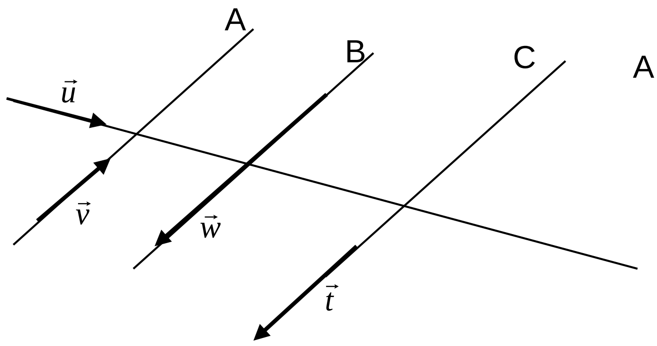
1) Dados los vectores de las figuras completa de modo que las siguientes expresiones resulten verdaderas

a)



.... es el extremo de $\overrightarrow{bc}$

b)



A // B // C

.... y .... tienen distinta dirección

.... y .... tienen igual dirección

.... y .... tienen distinto sentido

2) Dibuja los vectores $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ y $\vec{t}$, sabiendo que

- La dirección de $\vec{a}$ es una recta horizontal y su sentido hacia la derecha, con $|\vec{a}| = 3$

- La dirección de $\vec{b}$ es una recta vertical y su sentido hacia abajo con $|\vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$

- $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tienen igual dirección, igual módulo pero distinto sentido

- $\vec{t} = \overline{a_0}$

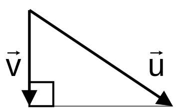
3) Dado $\vec{a}$ dibuja

a) $\vec{v} / \vec{v} // \vec{a}$, sent. $v \neq$ sent. $\vec{a}$ y $|\vec{v}| = \frac{3}{2}|\vec{a}|$

b) $\vec{m} / \vec{m} \perp \vec{a} \wedge |\vec{m}| = |\vec{a}|$

4) Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). justifica la respuesta

a) $|\vec{u}| > |\vec{u}_0|$



b) En los vectores de la figura es $|\vec{u}| > |\vec{v}|$

c) $\vec{u} // \vec{v} \Rightarrow \vec{u}_0 = \vec{v}_0$

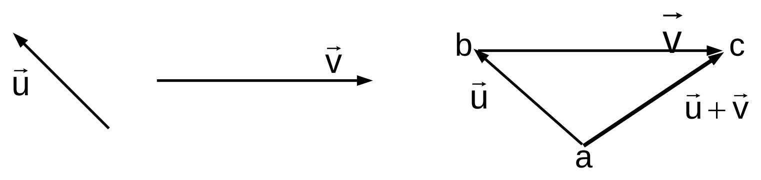
d) $|\vec{a}| > |\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}_0| > |\vec{b}_0|$

III- Operaciones entre vectores

III-1- Suma de vectores. Definición

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se denomina suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a un vector que se nota $\vec{u} + \vec{v}$ y se obtiene de la siguiente manera

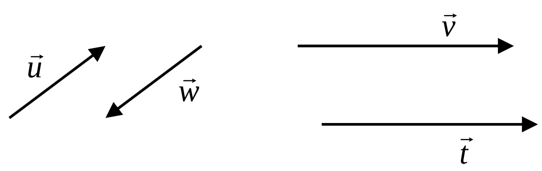
Fijado arbitrariamente un punto a, queda determinado un punto b tal que $\vec{u} = \overrightarrow{ab}$ y a su vez queda determinado un punto c tal que $\overrightarrow{bc} = \vec{v}$. Se llama suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al vector $\overrightarrow{ac}$ así obtenido.



NOTA: se puede demostrar que la suma de vectores es independiente del punto *a* elegido y en consecuencia de los representantes $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{bc}$ correspondientes.

Para resolver

1) Dados los vectores $\vec{t}\,; \vec{u}; \vec{v}$ y $\vec{w}$ de la figura



i) Determina gráficamente

a) $\vec{u}+\vec{v}$

b) $\vec{v}+\vec{t}$

c) $\vec{u}+\vec{w}$

ii) Completa con la relación de orden que corresponda:

$|\vec{u}+\vec{v}|$............$|\vec{u}|+|\vec{v}|$

$|\vec{v}+\vec{t}|$............$|\vec{v}|+|\vec{t}|$

$|\vec{u}+\vec{w}|$............$|\vec{u}|+|\vec{w}|$

2) Prueba geométricamente que:

$$\forall \vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ es } \left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$$

3) Dibuja dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que:

   a) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{s} \quad \wedge \quad |\vec{s}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$

   b) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{s} \quad \wedge \quad |\vec{s}|=0$

¿Qué características tienen $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cada caso?

III-2- Suma de vectores- Propiedades

Dados $\vec{a}; \vec{b}$ y $\vec{c}$ se puede probar la validez de las siguientes propiedades.

a) La suma de vectores es **asociativa**

$$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$$

b) La suma de vectores es **conmutativa**

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

c) Existe el **elemento neutro**

$$\forall \vec{a} \text{ se tiene } \vec{a}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{a}=\vec{a}$$

A $\vec{o}$ se lo denomina *elemento neutro* de la suma de vectores.

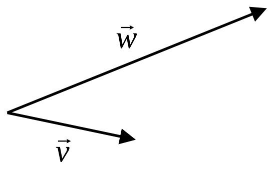
d) Existe el **elemento opuesto**

$$\forall\, \vec{a}\ \exists\ -\vec{a} / \vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{o}$$

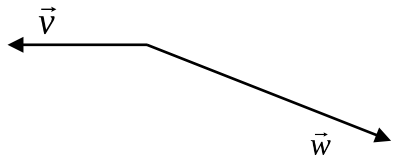
Para resolver

1) Suma los vectores indicados en cada uno de los casos siguientes si $|\vec{v}|=2$ y $|\vec{w}|=4$

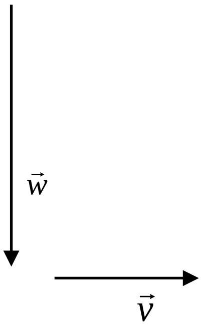
a)



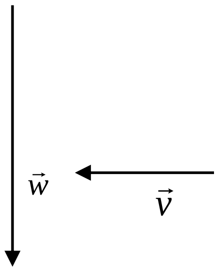
b)



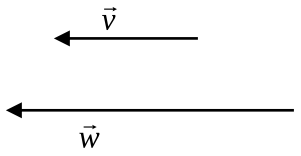
c)



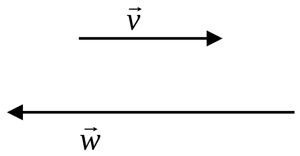
d)



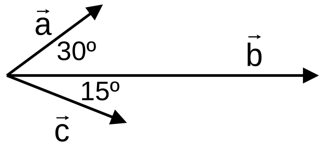
e)



f)



2) Dados los vectores $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{c}$



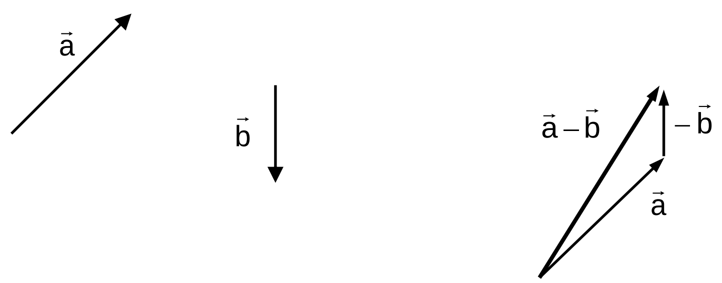
Dibuja:

i) $\vec{d}$ / $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$

ii) $\vec{e}$ / $\vec{e} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

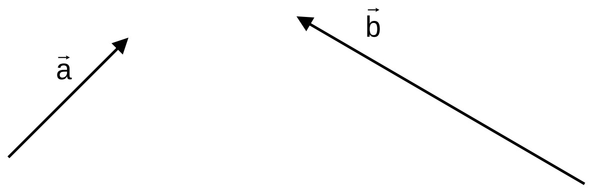
III-3- Diferencia entre dos vectores

$$\forall\ \vec{a};\vec{b} \text{ es } \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Para resolver

1) Dados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura



Construye:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $-\vec{a} + \vec{b}$ c) $\vec{a} - \vec{b}$ d) $\vec{b} - \vec{a}$ e) $-\vec{a} - \vec{b}$

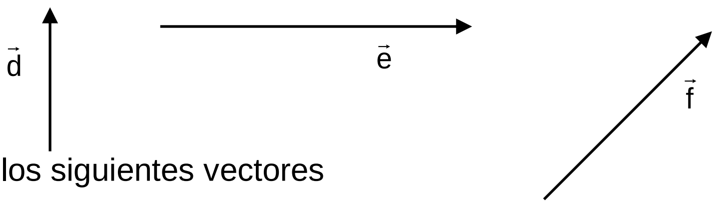
¿Cómo son los vectores $\vec{a} - \vec{b}$ y $\vec{b} - \vec{a}$?

2) Verifica usando propiedades de la suma de vectores que:

$$\forall\ \vec{a};\vec{c} \text{ es } \vec{a} + \vec{m} = \vec{c} \text{ con } \vec{m} = \vec{c} - \vec{a}$$

3) Verifica que si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con origen común determinan un paralelogramo, los vectores $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ están sobre las diagonales del paralelogramo

4) Dados $\vec{d}$; $\vec{e}$ y $\vec{f}$



Dibuja cada uno de los siguientes vectores

a) $\vec{g} / \vec{g} = \vec{d} - \left(\vec{e} + \vec{f}\right)$

b) $\vec{u} / -\vec{d} + \vec{e} - \vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$

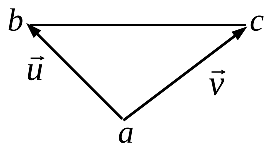
5) Expresa en cada caso los vectores indicados en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

a)

$\overrightarrow{bc} =$

$\overrightarrow{cb} =$

$\overrightarrow{ca} =$



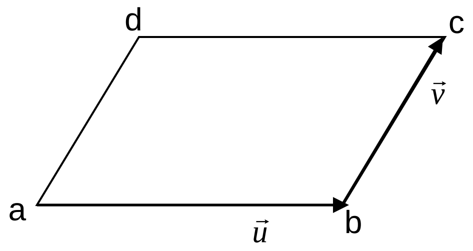
b) abcd es un paralelogramo

$\overrightarrow{cd} =$

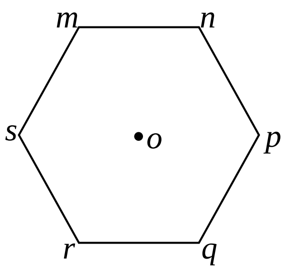
$\overrightarrow{da} =$

$\overrightarrow{db} =$

$\overrightarrow{ac} =$



6) En la figura tenemos un exágono regular de centro o.
Nombra:



a) tres vectores iguales que $\overrightarrow{qp}$

b) tres vectores iguales a $\overrightarrow{om}$

c) 4 vectores con el mismo módulo que $\overrightarrow{sm}$

d) cuatro vectores con la misma dirección que $\overrightarrow{oq}$

- Justifica la respuesta del apartado a)

7) Analiza si la siguiente proposición es verdadera. Justifica.

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{a}| = 2\\ |\vec{b}| = 3\end{array}\right\} |\vec{a} + \vec{b}| = 5$$

8) Un nadador quiere atravesar un río nadando a una velocidad $|\vec{v}_1| = 6\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ en dirección perpendicular a la orilla; pero la corriente lo desplaza con una velocidad $|\vec{v}_2| = 4\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Dibuja los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ (con una escala conveniente) y encuentra el vector $\vec{v} \,/\, \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Este vector representa la velocidad de desplazamiento del nadador. La dirección de $\vec{v}$ es la dirección real en que se mueve el nadador.

Calcula $|\vec{v}|$ observando que quedó determinado un triángulo rectángulo.

IV- Producto de un vector por un número real

IV-1 Definición

Llamamos producto de un $\vec{u}$ por un número real α, o producto de un número α por un vector $\vec{u}$, a un vector $\vec{v}$ tal que:

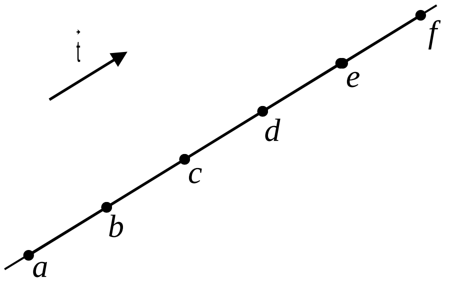
- Si $\alpha \neq 0 \wedge \vec{u} \neq \vec{0}$

$$\vec{v} = \alpha.\vec{u} = \begin{cases} |\vec{v}| = |\alpha|.|\vec{u}| \\ \vec{v} \,//\, \vec{u} \\ \text{sentido de } \vec{v} = \text{sentido de } \vec{u} \text{ si } \alpha > 0 \\ \text{sentido de } \vec{v} \neq \text{sentido de } \vec{u} \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

- Si $\alpha = 0 \vee \vec{u} = \vec{o} \Rightarrow \vec{v} = \vec{o}$

Ejemplos:

1)

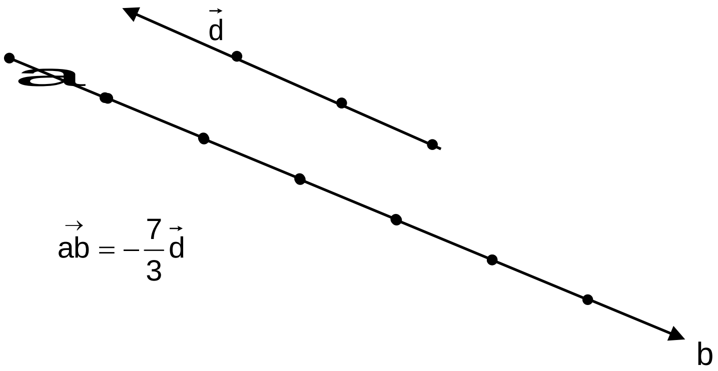


$$\vec{ab} = \vec{bc} = \vec{cd} = \vec{de} = \vec{ef} = \vec{t}$$

$\vec{bd} = 2\vec{t}$ $\quad$ $\vec{ec} = (-2)\vec{t}$ $\quad$ $\vec{cf} = 3\vec{t}$

$\vec{af} = 5\vec{t}$ $\quad$ $\vec{fe} = (-1)\vec{t}$

2)



$$\vec{ab} = -\frac{7}{3}\vec{d}$$

Para resolver

9) Dibuja los vectores $\vec{t}; \vec{l}$ y $\vec{m}$ tales que

a) $\vec{t} = 0{,}5\,\vec{a}$

b) $\vec{l} = \frac{5}{3}\,\vec{a}$

c) $\vec{m} = -3\vec{a}$

IV-2 Propiedades del producto de un vector por un número

Para cualquier par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y los números reales α y β se pueden demostrar las siguientes propiedades

i) $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$

ii) $(\alpha+\beta)\,\vec{u}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{u}$

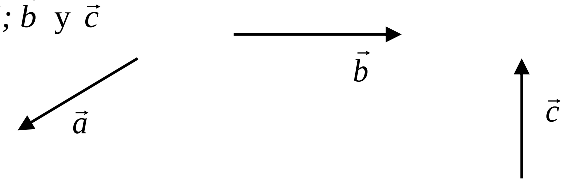
iii) $\alpha(\beta\ \vec{u})=(\alpha\ \beta)\,\vec{u}$

iv) $1\vec{v}=\vec{v}$

Para resolver

1) ¿Por qué $(-1)\vec{u}=-\vec{u}$?

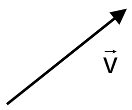
2) Dados $\vec{a}; \vec{b}$ y $\vec{c}$



Representa gráficamente $\vec{w}$ siendo:

$$\vec{w}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$$

3) Siendo



e) dibuja $\frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v}$ y $-\frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v}$

f) demuestra que $\frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v}$ es el versor asociado $(\vec{v}_0)$ de $\vec{v}$

IV-3 Vectores paralelos

Dos vectores no nulos son paralelos cuando poseen la misma dirección

En símbolos: $\vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow \text{dirección de } \vec{a} = \text{dirección de } \vec{b}$

Propiedad de los vectores paralelos

Dados dos vectores paralelos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ existe siempre un número real λ $(\lambda \neq 0)$ tal que $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$

$$\text{En símbolos: } \vec{u} \,//\, \vec{v} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in R - \{0\} / \vec{v} = \lambda \vec{u}$$

Notemos que si: $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$, entonces

$$|\vec{v}| = |\lambda|\,|\vec{u}|$$

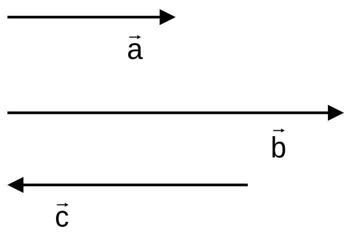
de donde

$$|\lambda| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$

como $|\vec{v}|$ y $|\vec{u}|$ son números reales y $|\vec{u}| \neq 0$ siempre existe el cociente $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ que nos da el valor absoluto del número λ buscado, en cuanto si es positivo o negativo dependerá que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan igual o distinto sentido.

Para resolver

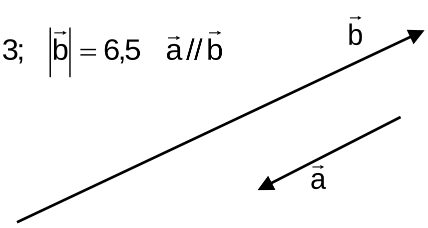
1) $\vec{a}; \vec{b}$ y $\vec{c}$ son los vectores paralelos cuyos sentidos están indicados en la figura con $|\vec{a}| = 2;\ |\vec{b}| = 4$ y $|\vec{c}| = 3$



a) calcula λ y μ tal que $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ y $\vec{b} = \mu\vec{c}$

b) determina $|\vec{t}|$ si $\vec{t} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

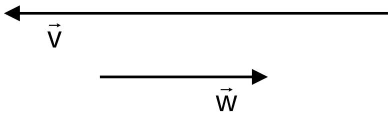
2) En la figura $|\vec{a}| = 3;\ |\vec{b}| = 6{,}5\quad \vec{a} \,//\, \vec{b}$



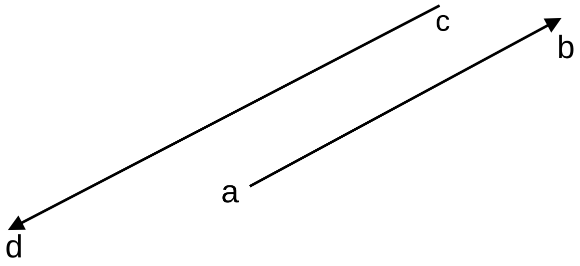
Construye el vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v} = \vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$

3) Calcula el valor de k si $\left| k\,\vec{v} \right| = 5\sqrt{2}$ y $\left|\vec{v}\right| = 2\sqrt{2}$

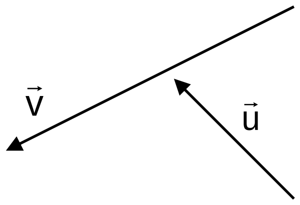
4) Reproduce la siguiente figura y averigua cuánto vale el número *x* tal que $\vec{v} = x\,\vec{w}$



5) Sea la figura siguiente con $\left|\overrightarrow{ab}\right| = 6$ y $\left|\overrightarrow{cd}\right| = 7.2$ con respecto al centímetro, construye el vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{cd} - \frac{2}{3}\,\overrightarrow{ab}$



6) Se dan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura, determina el valor de *x* tal que $\vec{v} = x\,\vec{u}$

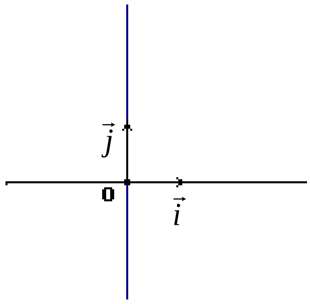


7) Se da un vector $\vec{i}$. Dibuja los vectores : $5\vec{i}$; $-\frac{5}{2}\vec{i}$; $\frac{1}{2}\vec{i}$, construye la suma $\vec{v}$ de dichos vectores y determina *x* tal que $\vec{v} = x\,\vec{i}$

8) Dibuja un triángulo abc cualquiera y marca dos puntos t y s tales que $\overrightarrow{bt} = \overrightarrow{ac}$ y $\overrightarrow{cs} = \overrightarrow{ba}$. Determina, justificando tu respuesta si t, c y s están alineados.

V Sistema de coordenadas cartesiano ortogonal
V -1- Definición

Un sistema de referencia o de coordenadas cartesiano ortogonal en el plano está constituido por un punto fijo y dos versores perpendiculares con origen en él
Sea *o* el punto fijo, $\vec{i}$ y $\vec{j}$ los versores perpendiculares.



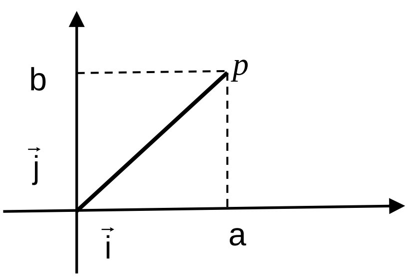
En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} o \quad \text{punto fijo} \\ \vec{i} \perp \vec{j} \\ \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{o;\ \vec{i};\ \vec{j}\right\}$$: **sistema de referencia cartesiano ortogonal**

V-2- Vector posición

Dado en un plano el sistema de referencia $\left\{o;\ \vec{i};\ \vec{j}\right\}$, definimos como **vector posición** en el plano a todo vector con origen en ese punto *o.* Por consiguiente, cualquier punto *p* del plano determina el vector posición $\overrightarrow{op}$

Por el extremo *p* trazamos las rectas perpendiculares a $\vec{i}$ y a $\vec{j}$ respectivamente, hasta cortar a las rectas que contienen a estos vectores. Sean a y b los puntos así obtenidos.



Como $\vec{oa}$ es paralelo a $\vec{i}$, según la propiedad de vectores paralelos, resulta:

$$\vec{oa} = \lambda\ \vec{i} \quad \text{con} \quad \lambda = x_p \ \ \text{(abscisa del puntos } p\text{)}$$

luego:

$$\vec{oa} = x_p\ \vec{i}$$

+
de donde

$$\left|\vec{oa}\right| = \left|x_p\right| \underbrace{\left|\vec{i}\right|}_{1}$$

siendo

$$\text{sentido de } \vec{oa} = \text{ sentido de } \vec{i} \quad \text{si} \quad x_p > 0$$

$$\text{sentido de } \vec{oa} \neq \text{ sentido de } \vec{i} \quad \text{si} \quad x_p < 0$$

Análogamente

$$\vec{ob} = y_p\ \vec{j} \quad \text{con} \quad y_p \text{ : ordenada del punto } p$$

De acuerdo a la definición de suma de vectores es:

$$\vec{op} = \vec{oa} + \vec{ob} = x_p\ \vec{i} + y_p\ \vec{j}$$

Entonces

$$\boxed{\vec{op} = x_p\ \vec{i} + y_p\ \vec{j}}$$

es la **expresión canónica o cartesiana** del vector $\vec{op}$

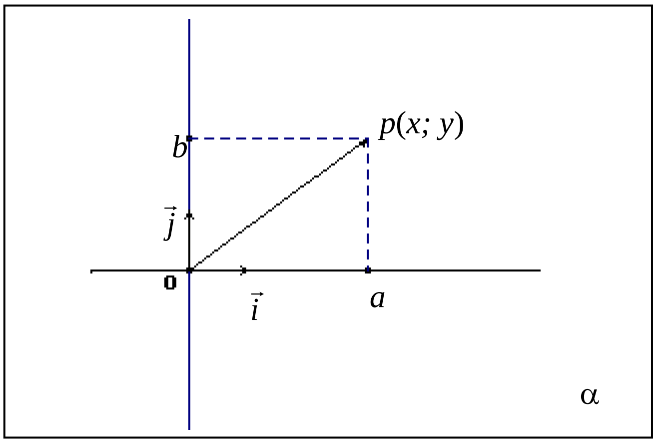
- Los vectores $\vec{oa}$ y $\vec{ob}$ se llaman **componentes vectoriales** de $\vec{op}$
- Los escalares x_p e y_p se llaman **componentes escalares** de $\vec{op}$

En símbolos :

$$\overrightarrow{op} = (x_p \ ; y_p)$$

- Queda establecida una **correspondencia biunívoca** entre los puntos del plano y los pares ordenados de reales que caracterizan dichos puntos en el sistema de referencia ubicado en él y entre estos últimos y los vectores de posición con extremos en los primeros.

Resumiendo:



- $p \in \alpha \longleftrightarrow p(x;y) \longleftrightarrow \overrightarrow{op}$ en un $\{o;\vec{i};\vec{j}\}$

- Se llaman **ejes coordenados** a las rectas que pasan por *o* y tienen la dirección de los vectores $\vec{i}$ **(**eje de las abscisas o eje de la *x*) y $\vec{j}$ (eje de las ordenadas o de las *y*)

Para resolver

1) Determina cuáles son las componentes escalares de

   a) $\vec{i}$ b) $\vec{j}$ c) $\vec{o}$

2) Completa de modo que resulten verdaderas las siguientes proposiciones

   a) $p(x;....) \in$ eje de las abscisas con $x \in R$

   b) $p(0;y) \in$ eje .... con $y \in R$

3) Representa en distintos sistemas de referencia los siguientes subconjuntos de puntos

a) $A=\{(x;y)/\,x=-2\wedge -1\leq y\leq 3\}$

b) $B=\{(x;y)/\,x\geq -1\ \ \wedge y<3\}$

c) $C=\{(x;y)/|x|<2\wedge |y|=1\}$

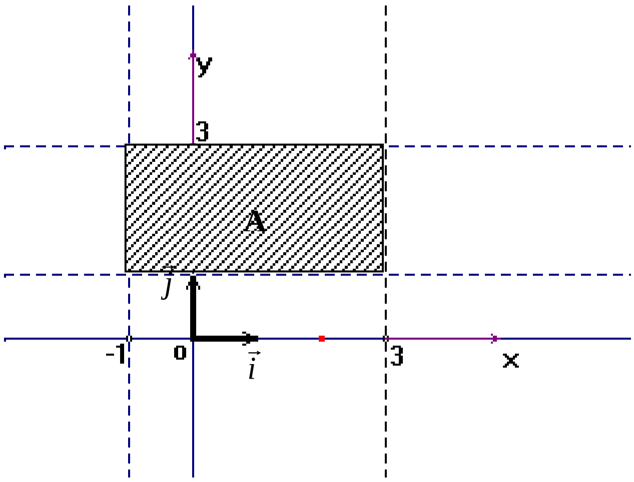
d) $D=\left\{(x;y)/\,x>-\dfrac{2}{3}\vee y<\sqrt{2}\right\}$

e) $E=\{(x;y)/\,x\in Z;\ y\in Z;\quad x.y=12\}$

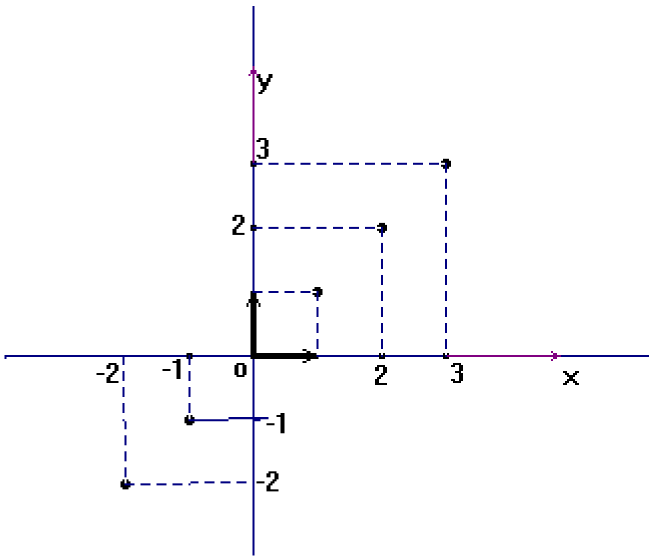
f) $F=\{(x;y)/\,x\in Z;\ y\in Z;\quad x^2+y^2=25\}$

4) Caracteriza, en símbolos, a los siguientes conjuntos de puntos

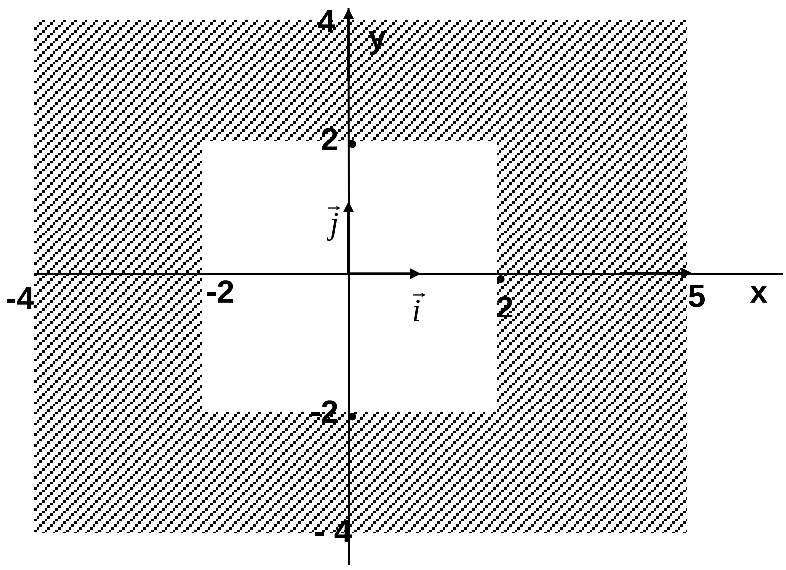
a)



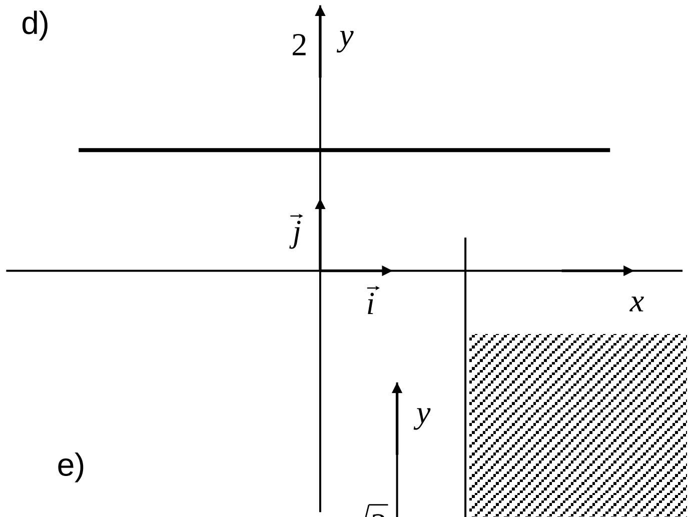
b)



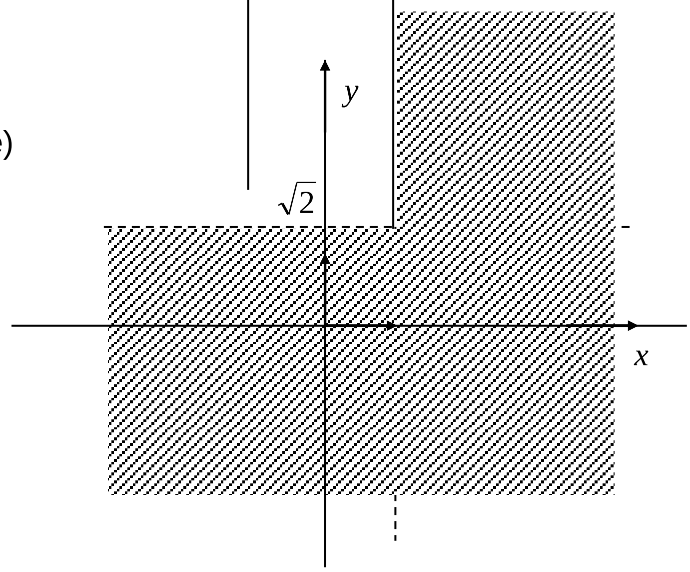
c)



d)



e)



5) Dados en un $\{o;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\}$ $a(4;1)$ y $b(-2;0)$ determina:

a) componentes escalares de $\overrightarrow{oa}$

b) componentes vectoriales de $\overrightarrow{ob}$

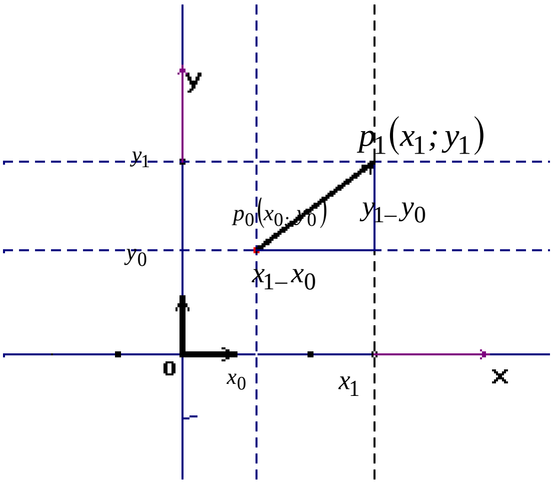
c) expresión cartesiana o canónica de $\overrightarrow{oa}$ y $\overrightarrow{ob}$

d) $\left|\overrightarrow{ob}\right|$

e) $\alpha \,/\, \overrightarrow{ob} = \alpha\,\vec{i}$

V-4 Componentes escalares de un vector no posición

Dados en un $\{o;\, \vec{i}\,;\, \vec{j}\}$ $\quad p_0(x_0;\, y_0)$ y $p_1(x_1;\, y_1)$



resulta:

$$\overrightarrow{op_0} + \overrightarrow{p_0p_1} = \overrightarrow{op_1} \overset{(1)}{\Rightarrow} \overrightarrow{p_0p_1} = \overrightarrow{op_1} - \overrightarrow{op_0} \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \overrightarrow{p_0p_1} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right) - \left(x_0\vec{i} + y_0\vec{j}\right) \overset{(3)}{\Rightarrow} \overrightarrow{p_0p_1} = \left(x_1\vec{i} - x_0\vec{i}\right) + \left(y_1\vec{j} - y_0\vec{j}\right) \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \boxed{\overrightarrow{p_0p_1} = \underbrace{(x_1 - x_0)}\vec{i} + \underbrace{(y_1 - y_0)}\vec{j}}$$

Expresión canónica o cartesiana de un vector en el plano

Componentes escalares de $\overrightarrow{p_0p_1}$

$(x_1 - x_0)\vec{i}$ y $(y_1 - y_0)\vec{j}$ son las componentes vectoriales de $\overrightarrow{p_0p_1}$

(1) definición de resta de vectores
(2) reemplazando a cada vector por su expresión cartesiana
(3) propiedad de suma de vectores
(4) propiedad del producto de un vector por un escalar

Para resolver

1) Dados en un $\{o;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\}$ $a(1;-3)$; $\overrightarrow{ob} = -\vec{i} + 2\vec{j}$; $\overrightarrow{oc} = (0;3)$, determina:

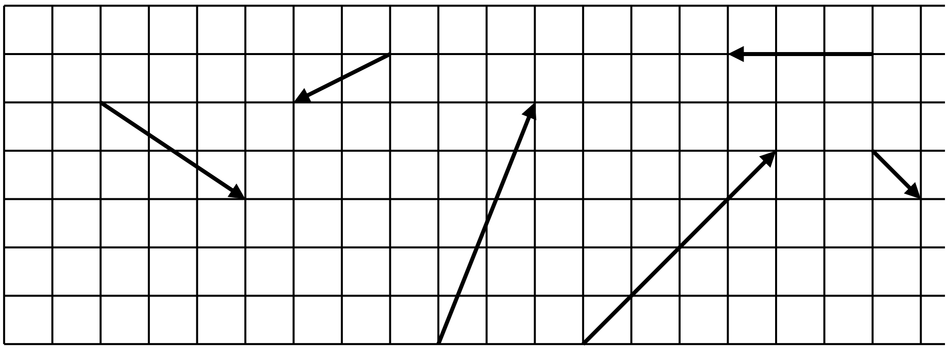
   a. la expresión canónica de $\overrightarrow{ab}$

   b. componentes escalares de $\overrightarrow{bc}$

   c. componentes vectoriales de $\overrightarrow{ac}$

   d. representación gráfica de $-\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{cb}$

2) Identifica los vectores de la figura



$\vec{a} = (4;4)$; $\vec{b} = (3;-2)$; $\vec{c} = (1;\ -1)$; $\vec{d} = (-2;-1)$; $\vec{e} = (2;\ 5)$; $\vec{f} = (-3;\ 0)$

V- 5 - Igualdad de vectores

Los vectores $\vec{u} = (u_1;\ u_2)$ y $\vec{v} = (v_1;\ v_2)$, son iguales si y solo si sus componentes son iguales.
En símbolos:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$$

Para resolver

3) Dados en un $\{o;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\}$; $a(-2;3)$; $\overrightarrow{oc} = 2\vec{i} + \vec{j}$; $\overrightarrow{ob} = (2;5)$, determina:

   a) la representación gráfica de $\vec{u}$ / $\vec{u} = \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cp}$

b) analíticamente las coordenadas de *p*

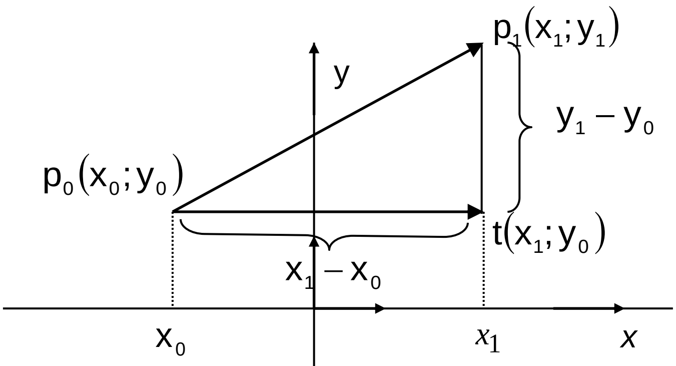
c) ¿es $\overrightarrow{qr} = \overrightarrow{ab}$? siendo $q(5;\,0)$ y $r(8;\,2)$. Justifica

V- 6- Distancia entre dos puntos de un plano. Módulo de un vector

Dados los puntos $p_0(x_0;\,y_0)$ y $p_1(x_1;\,y_1)$ teniendo en cuenta las componentes vectoriales de $\overrightarrow{p_0p_1}$ y la aplicación del Teorema de Pitágoras, resulta:

Dist $(p_0p_1) = \left|\overrightarrow{p_0p_1}\right|$

$$\left|\overrightarrow{p_0p_1}\right|^2 = \left|\overrightarrow{p_0t}\right|^2 + \left|\overrightarrow{tp_1}\right|^2 \qquad (1)$$



de donde

$$\overrightarrow{p_0t} = (x_1 - x_0)\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{p_0t}\right| = \left|(x_1 - x_0)\vec{i}\right| = |x_1 - x_0|$$

$$\overrightarrow{tp_1} = (y_1 - y_0)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{tp_1}\right| = \left|(y_1 - y_0)\vec{j}\right| = |y_1 - y_0|$$

entonces resulta en (1)

$$\left|\overrightarrow{p_0p_1}\right| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

pues $|x_1 - x_0|^2 = (x_1 - x_0)^2$ y $|y_1 - y_0|^2 = (y_1 - y_0)^2$

Para resolver

1) Dado el punto $p(-1;-1)$

a) ¿Cuál de los siguientes puntos está a menor distancia de *p?*
$a(2;\,5)$ $\quad b(-2;\,-5)$ $\quad c(0;\,3)$ $\quad d(1;\,-1)$

b) ¿Cuáles de los puntos del apartado anterior pertenecen al círculo de centro *p* y radio 2? Justifica analíticamente tus respuestas.

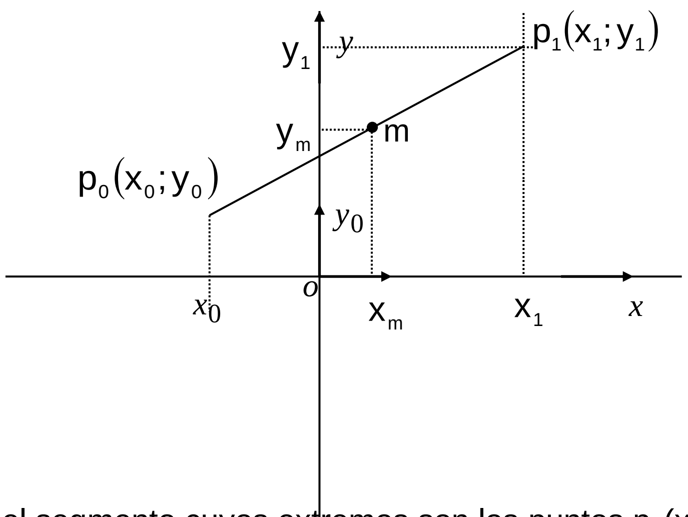
2) Dados $a(2;5)$ $b(4;1)$ $c(6;5)$ prueba que el triángulo abc es isósceles.

3) Dada una circunferencia de centro $c(4;-3)$ que pasa por el punto $p(9;9)$,

   i. determina la medida de su radio

   ii. averigua si dicha circunferencia pasa por el origen de coordenadas

V-7- Coordenadas del punto medio de un segmento determinado por dos puntos del plano



Considerando el segmento cuyos extremos son los puntos $p_0(x_0;y_0)$ y $p_1(x_1;y_1)$ con $m(x_m;y_m)$ su punto medio ,resulta:

$$\vec{p_0m} = \vec{mp_1}$$

$$(x_m-x_0)\,\vec{i} + (y_m-y_0)\,\vec{j} = (x_1-x_m)\,\vec{i} + (y_1-y_m)\,\vec{j}$$

Aplicando la propiedad de vectores iguales en función de sus componentes se obtiene

$x_m-x_0 = x_1-x_m$

$2x_m = x_1+x_0$

$$x_m = \frac{x_1+x_0}{2}$$

$y_m-y_0 = y_1-y_m$

$2y_m = y_1+y_0$

$$y_m = \frac{y_1+y_0}{2}$$

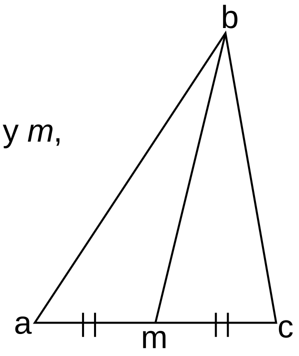
$$\boxed{m\left(\frac{x_1+x_0}{2};\frac{y_1+y_0}{2}\right)}$$

La abscisa y la ordenada del punto medio de un segmento determinado por dos puntos de un plano son iguales a la semisuma de la abscisas y de las ordenadas respectivamente, de los extremos del segmento

Ejemplo:

Calcula la medida de la mediana $\overline{bm}$ del triángulo determinado por los puntos:

$a\left(-\frac{13}{2};\ 2\right) \qquad b(-4;\ 7) \qquad c(-3;\ 5)$



Calcular la medida de dicha mediana es calcular la distancia entre *b* y *m*, o sea

$$d(b;\ m) = \sqrt{(x_m - x_b)^2 + (y_m - y_b)^2}$$

Para esto se necesita calcular las coordenadas del punto medio *m* del lado $\overline{ac}$

$$\left.\begin{array}{l} x_m = \dfrac{x_a + x_c}{2} = \dfrac{\left(-\dfrac{13}{2}\right) + (-3)}{2} = \dfrac{-\dfrac{19}{2}}{2} = -\dfrac{19}{4} \\[2ex] y_m = \dfrac{y_a + y_c}{2} = \dfrac{2+5}{2} = \dfrac{7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(-\frac{19}{4};\ \frac{7}{2}\right)$$

$$d(b;\ m) = \sqrt{\left(-\frac{19}{4} - (-4)\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 7\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-19+16}{4}\right)^2 + \left(\frac{7-14}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{205}{16}} = \frac{\sqrt{205}}{4}$$

La mediana $\overline{bm}$ mide $\dfrac{\sqrt{205}}{4}$

Para resolver

1) Sabiendo que los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $a(-2;\ 4)$ y $b(4;\ 2)$, determina las coordenadas del centro de dicha circunferencia y el radio de la misma.

2) Calcula la distancia del origen de coordenadas al punto medio del segmento cuyos extremos son: $p_1(-2;3)$ y $p_2(-4;\ 0)$

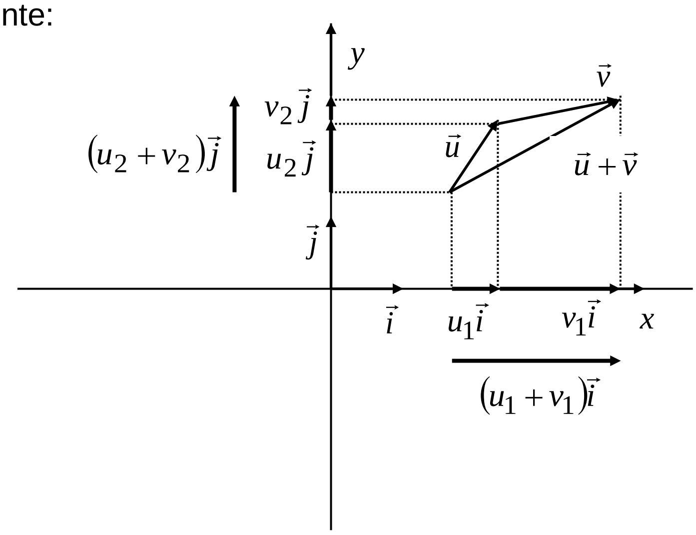
3) Si un extremo de un segmento es el punto (5; 3) y su punto medio es (8; 1) ¿Cuál es el otro extremo del segmento?

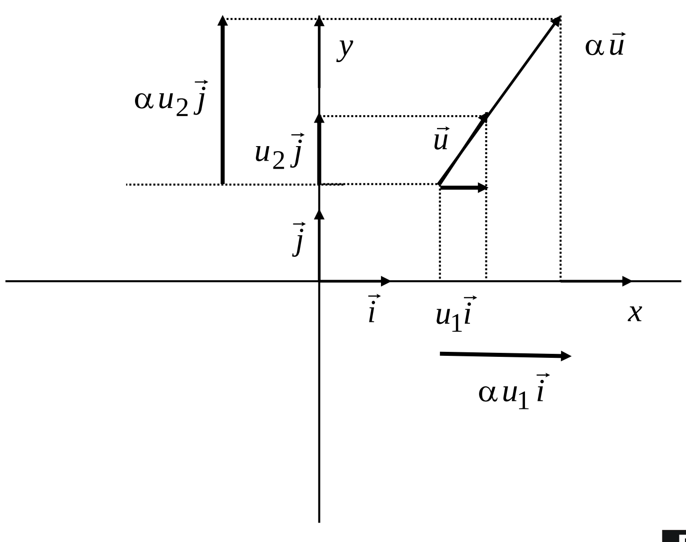
VI - Operaciones con vectores en el plano.

Dados $\alpha \in R$ y en un $\{o;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\}$ $\vec{u}=(u_1;u_2)$ $\vec{v}=(v_1;v_2)$, se puede probar que:

- $\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1;\ u_2 \pm v_2)$
- $\alpha\vec{u} = (\alpha u_1;\ \alpha u_2)$

Gráficamente:





Para resolver:

1) Demuestra que dados los vectores, de componentes no nulas,

$$\vec{a}=(a_1;a_2) \text{ y } \vec{b}=(b_1;b_2)\ \vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$$

2) Dados en un $\{o;\vec{i};\vec{j}\}$ los siguientes vectores:

$$\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j};\quad \vec{v}=-2\vec{i}-4\vec{j} \quad \text{y} \quad \vec{w}=\vec{i}-7\vec{j}$$

Calcula:

a) $\vec{u}+\vec{v}$

b) $3\vec{u}$

c) $\vec{w}-\vec{u}$

d) $2\vec{u}-5\vec{w}$

3) Realiza en cada uno de los siguientes casos, un gráfico- razona geométricamente sobre el mismo y halla las coordenadas de todos los puntos:

   a. del semiplano de la izquierda del eje y que están a una distancia 3 del eje *x* y 2 del eje *y*.

   b. que están a una distancia 7 del eje *x* y 4 del eje *y*

   c. que están a una distancia 13 del punto (1; 0) y a una distancia 5 del eje *x*.

4) Halla, en cada caso, una condición algebraica que solo cumplen las coordenadas (*x*; *y*) de sus puntos:

   a. de la recta paralela al eje *x* que contiene al punto (3; 6)

   b. del eje *y*

   c. del semiplano de la derecha del eje *y*

5) Completa el cuadro

a	b	Componentes escalares de $\vec{ba}$	Expresión canónica de $\vec{ob}$	$\left\lvert \vec{oa} \right\rvert$	dist(a;b)	Coordenadas del punto medio de $\overline{ab}$
(2;4)	(4;-2)					
(0;-2)		(4;1)				
	(4;0)					(5;-2)
(-1;1)			-3i+7j			

6) Dado en un sistema ortogonal $\{o; \vec{i}\,; \vec{j}\}$ los siguientes vectores posición

$$\vec{op_1} = -4\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{op_2} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\vec{op_3} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$$

a. represéntalos gráficamente

b. indica sus respectivas componentes escalares

c. halla el módulo de cada uno

d. indica las coordenadas de los puntos p_1; p_2 y p_3

e. halla $\vec{or}$ / $\vec{or} = \vec{op_1} + \vec{op_2} + \vec{op_3}$

f. halla $\vec{os}$ / $\vec{or} + \vec{os} = \vec{0}$

7) Dados en un $\{o;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ los siguientes puntos: $a(-3;-3)$ $b(-2;3)$ y $c(3;-2)$

a. halla por sus componentes escalares el $\vec{v} = 2\,\overrightarrow{ac} - \overrightarrow{cb}$

b. calcula el $|\vec{v}|$

c. calcula $\left|\overrightarrow{ab}\right| + \left|\overrightarrow{bc}\right|$ y $\left|\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}\right|$. Obtiene una conclusión.

d. Escribe la expresión canónica de $\overrightarrow{oa}$ y $\overrightarrow{ob}$

e. Obtiene la expresión canónica del versor asociado a $\overrightarrow{ac}$

8) Halla la distancia entre los puntos $p_1(3;-2)$ y $p_2(7;-5)$

9) Sean $a(2;1)$ y $b(5;3)$ en un $\{o;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$, halla:

a. la expresión canónica del $\overrightarrow{ab}$

b. indica sus componentes escalares y vectoriales

c. halla las coordenadas del punto *m*, tal que
$\overline{ma} = \frac{1}{2}\overline{ab}$ y $m \in \overline{ab}$

10) Dados los vectores $\vec{a} = (2;1)$; $\vec{b} = (-1;4)$ y $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j}$,

a. halla las componentes escalares de: $\vec{d} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c} + \vec{e}$ si $\vec{e} = \frac{\vec{b}}{|\vec{a}|}$

b. calcula $\vec{u} /\ \vec{a} - 2\vec{u} = 4\vec{u} - 2\vec{b}$

c. determina las componentes escalares de $\overrightarrow{b_0}$

11) Si $\vec{b} = (-1;\ 3);\ p(0;\ -1)$ y $\vec{b} = \overrightarrow{pq}$, calcula las coordenadas del punto *q*.

12) ¿Qué coordenadas debe tener el punto *p* para que se verifique que $3\overrightarrow{pq} - 2\overrightarrow{qr} = \vec{0}$ siendo $q(3;\ 2)$ y $r(-1;\ 5)$

13) Calcula los números reales α y β tales que: $3(\alpha;\beta) - (2;\ 1) = (2\alpha;\ 2\beta)$

14) En un $\{o;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ grafica el triángulo rectángulo cuyos vértices son: $a(-1;3)$ $b\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ y $c(3;2)$.

d. Verifica que ese triángulo es rectángulo

e. Halla el área del $\overset{\Delta}{abc}$

f. Halla la medida de la mediana correspondiente a la hipotenusa

15) Dados $a(-1;2)$ $b(2;5)$ y $c(-2;1)$ halla las coordenadas de *r* tal que $\overrightarrow{cr} = 2\overrightarrow{ab}$

16) Prueba que el cuadrilátero cuyos vértices son: $a(8;-3);\ b(6;5);\ c(-2;3)$ y $d(0;\ -5)$, es un rombo. ¿Puedes afirmar que es un cuadrado? ¿por qué?

17) Si $a(1;2);\ b(4;0)$ y $c(3;5)$ son tres de los vértices de un cuadrado, halla:

a) las coordenadas del cuarto vértice

b) las coordenadas del punto de intersección de las diagonales

c) la medida de las diagonales

18) Averigua si $a(1;1);\ b(3;3);\ c(5;3)$ y $d(1;\ -1)$ son los vértices de un trapecio. Explica por qué.

19) Demuestra que mrst es un paralelogramo si:
$m(-3;\,-1);\ r(-1;\,3);\ s(4;\,3)$ y $t(2;-1)$ determina el punto de intersección de las diagonales y calcula la medida de ellas.

20) Los puntos $a(-1;\,0)$ y $b(-1;\,6)$ son los vértices de la base de un triángulo isósceles. Calcula las coordenadas del tercer vértice.

21) Determina si las siguientes proposiciones son V (verdaderas) o F (falsas). Justifica.

a) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$

b) $\vec{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es un versor

c) El punto medio del segmento *ab* es $m\left(\frac{1}{2};1\right)$, siendo $a(-1;\,3)$ y $b(2;5)$

d) Los puntos $p(-1;0);\ q(0;1)$ y $t(2;2)$ son vértices de un triángulo e)Si $|\vec{v}| = 2\sqrt{3} \quad \wedge \quad |\lambda\,\vec{v}| = 6\sqrt{3} \Rightarrow \lambda = 3$

PRÁCTICA COMPLEMENTARIA

1) Marca con una cruz la respuesta correcta:

Dados en un $\{o;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\}$ $a(-1;2);\ \vec{v} = (4;-3);\ \overrightarrow{oc} = 3\vec{i} - j$ siendo

a) $\overrightarrow{oa} + \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{t} + 2\vec{i} - \vec{j}$ resulta

i) $\vec{t} = 2\vec{i}$
ii) $\vec{t} = (10;-4)$
iii) $\vec{i} = \vec{t}$
iv) ninguna de las anteriores

b) $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mc}$ es:

i) $m\left(-2;\ \frac{3}{2}\right)$

ii) $m\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$
iii) $m(-2;\ 1)$
iv)ninguna de las anteriores

c) $\left|\overrightarrow{ac}\right|\ \vec{v} = \vec{u}$ resulta

i) $\vec{u} = 5\vec{i}$
ii) $\vec{u} = (20;-15)$
iii) $\vec{u} = (10;-15)$
iv)ninguna de las anteriores

d) $\vec{t}_0$ es un versor paralelo a $\overrightarrow{ac} + \vec{v}$ entonces

i) $\vec{t}_0 = \left(\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$
ii) $\vec{t}_0 = \left(\frac{8}{\sqrt{10}};\ -\frac{6}{\sqrt{10}}\right)$
iii) $\vec{t}_0 = \left(\frac{6}{\sqrt{72}};\ -\frac{6}{\sqrt{72}}\right)$
iv) ninguna de las anteriores

e) $x = \left|\overrightarrow{ac} + \vec{v}\right|$ resulta

i) $x = \sqrt{10}$
ii) $x = 4$
iii) $x = 5 + \sqrt{5}$
iv) ninguna de las anteriores

f) $\vec{v} = \overrightarrow{od}$ resulta que
i) a; c y *d* están alineados
ii) a; c y *d* forman triángulo
iii)el punto *d* y el punto *a* coinciden
iv) ninguna de las anteriores

g) $\vec{r} \mathbin{//} \vec{v} \ \wedge \ |\vec{r}| = 2 \ \wedge \ sent\,\vec{v} \neq sent\,\vec{r}$ entonces

i) $\vec{r} = \left(-\frac{8}{25};\ \frac{6}{25}\right)$

ii) $\vec{r} = \left(\frac{8}{5} ; -\frac{6}{5} \right)$

iii) $\vec{r} = \left(-\frac{8}{5} ; \frac{6}{5} \right)$

iv) ninguna de las anteriores

2) Determina si las siguientes proposiciones son V (verdaderas) o F (falsas). Justifica tus respuestas

a) Dado en un $\{o; \vec{i}\,; \vec{j}\}$ $\overrightarrow{oa} = (3; 3); \overrightarrow{bo} = (-2; -2); \overrightarrow{oc} = \vec{i} - \vec{j}$ y $\overrightarrow{bd} = (3; 1)$ *abcd* es un trapecio

b) Dados en un ñ $\{o; \vec{i}\,; \vec{j}\}\, a\left(0; -\frac{1}{2}\right); b(4; -3)\,; \vec{u} = -2\vec{i} + 4\vec{j} \;\wedge\; 2\,\overrightarrow{ab} - \vec{u} + 3\vec{x} = \vec{0}$ las componentes vectoriales de $\vec{x}$ son $-\frac{10}{3}\vec{i}$ y $3\vec{j}$

c) El área del triángulo isósceles cuyos vértices son $a(2; -2);\ b(-3; -1)$ y $c(1; 6)$ es $\frac{\sqrt{.6084}}{4}$

d) El triángulo de vértices $a(-1; 2);\ b(1; 0)$ y $c\left(\frac{15}{4}; \frac{11}{4}\right)$ es rectángulo no isósceles

e) El vector $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ es un versor

f) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} \text{ paralelo a } \vec{v} \\ |\vec{u}| = |\vec{v}| \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$

g) Si $|\alpha\, \vec{u}| = 4\sqrt{2} \quad \wedge \quad |\vec{u}| = 2\sqrt{2}$ entonces $\alpha = 2$

h) En el rectángulo *abcd* la base es el doble de su altura, entonces:

i) $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$

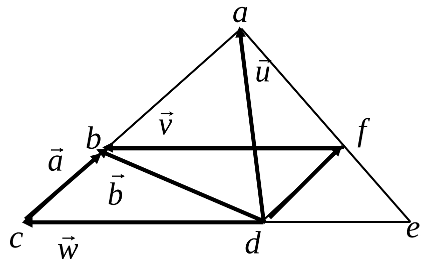
ii) $\overrightarrow{bc} = -\overrightarrow{da}$

iii) $\left|\overrightarrow{cd}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{bc}\right|$

iv) $\overrightarrow{bc} = 2\,\overrightarrow{ab}$

v) $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{cd}$

3) Expresa $\vec{u}$; $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y/o de sus opuestos.



4)El cuadrilátero *abcd* está inscripto en una circunferencia de centro *p*(1;0). Si se sabe que $a(4;4);\ b(-3;3)\ ;\ c(-2;-4);\ d(5;\ y)$

a) Calcula el radio de la circunferencia

b) Determina la ordenada del punto *d* , siendo $y < 0$

c) ¿Es el cuadrilátero *abcd* un paralelogramo?. Justifica.

d) Halla las coordenadas del punto *q* sabiendo que:

$\overrightarrow{qa} = -4\,\overrightarrow{cm}$ y que *m* es el punto medio de $\overline{cb}$

5)Dados los vectores $\vec{u} = (3;\ a)$ y $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ determina $(a;\ b)/\ \ 2\vec{u} - b\vec{v} = \vec{c}$ siendo $\vec{c} = \vec{i}$

Respuestas de la práctica complementaria

1)

	i	ii	iii	iv
a	x			
b		x		
c		x		
d	x			
e				x
f		x		
g			x	

2)

	a	b	c	d	e	f	g	h				
								i	ii	iii	iv	v
V	x	x	x	x	x				x	x		
F						x	x	x			x	x

No se presentan las justificaciones

3) $\vec{u} = \vec{b} + \vec{a}$

$\vec{v} = -\vec{a} + \vec{b}$

$\vec{w} = \vec{b} - \vec{a}$

4)
a) $r = 5$
e) -3
f) *abcd* es paralelogramo
g) $q(2;18)$

5) $a = -5$ $b = 5$

Bibliografía
Apunte Cod 1301-12 ALGEBRA VECTORIAL- Autores varios