Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Relaciones métricas

1º Año

Cód. 1105-15

Prof. María del Luján Martínez
Prof. Noemí Lagreca

Matemática

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

SISTEMA DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

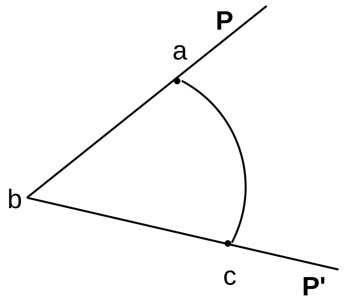
1.1. Ángulo plano convexo

Seguramente recordarás que en cursos anteriores habrás aprendido una definición de ángulo plano convexo. En esta oportunidad te brindaremos una nueva definición que te resultará muy útil para el tema que iremos desarrollando.

Definición:

Llamamos **ángulo plano convexo abc** y se simboliza $\widehat{abc}$ al conjunto de puntos del plano barridos por la semirrecta $\overrightarrow{ba}$ al pasar de su posición inicial P a una posición final P', describiendo el punto "a" un arco de circunferencia menor o igual que una semicircunferencia o igual a una circunferencia

Gráficamente :



Simbólicamente:

$\widehat{abc}$

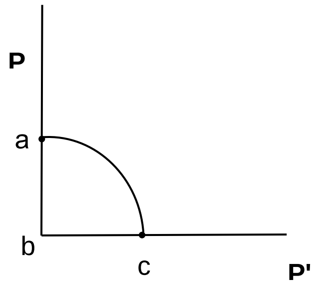
Clasificación de los ángulos convexos

Según el arco de circunferencia que describe, podemos clasificar los ángulos en :

<u>Ángulo Recto</u>

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es la cuarta parte de una circunferencia.

Gráficamente:



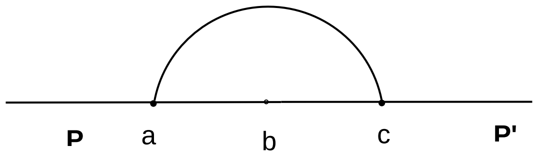
Simbólicamente:

$\hat{R}$

Ángulo llano

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es la mitad de una circunferencia.

Gráficamente:



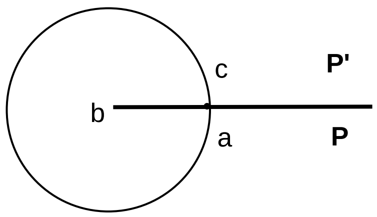
Simbólicamente:

$\hat{L}$

Ángulo de una vuelta

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es una circunferencia.

Gráficamente:



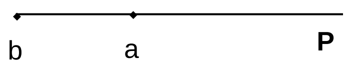
Simbólicamente:

$\hat{V}$

Ángulo nulo

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es un arco nulo.

Gráficamente:

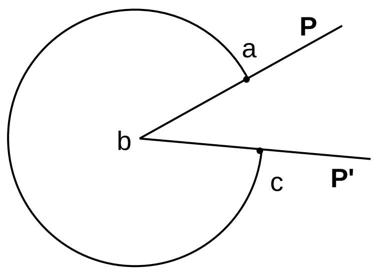


Simbólicamente:

$\hat{N}$

Sabías que...

*Llamamos **ángulo plano cóncavo** abc y se simboliza* $\widehat{abc}_{\text{cóncavo}}$ *al conjunto de puntos del plano barridos por la semirrecta* $\overrightarrow{ba}$ *al pasar de una posición inicial **P** a una posición final **P'**, describiendo un arco mayor que una semicircunferencia y menor que una circunferencia.*



1.2. UNIDADES CONVENCIONALES

Ya hemos analizado el concepto de “medir” segmentos y ángulos. A partir de esas ideas se estableció la necesidad de utilizar un segmento o un ángulo que se adopta como unidad y que permite medir.

La necesidad de trabajar en forma organizada da lugar a la elección de segmentos y ángulos adoptados como unidad en forma generalizada.

Surgen así, el **S**istema **I**nternacional de unidades (SI) y en particular el que a nosotros nos ocupa que es el “SIMELA” (**S**istema **M**étrico **L**egal **A**rgentino). Según este sistema adoptamos como segmento unidad el “metro”, unidad con la que ya estás familiarizado y has trabajado con múltiplos y submúltiplos de él.

Del mismo modo que para medir segmentos, cada vez que medimos un ángulo utilizamos una unidad de medida conveniente, la transportamos sobre el ángulo tantas veces como sea conveniente y obtenemos la medida de dicho ángulo. Esta unidad es elegida dentro de las unidades convencionales dando lugar a diversos sistemas de medición de ángulos.

Nosotros desarrollaremos el sistema sexagesimal

<u>Sistema sexagesimal</u>

El sistema sexagesimal de medición de ángulos data de la antigua Babilonia donde los habitantes consideraron que el año tenía 360 días y tomaron como unidad de medida angular el recorrido diario del Sol alrededor de la Tierra y, por lo tanto, adoptaron como unidad de medida un submúltiplo del ángulo de una vuelta, más exactamente como:

$$\frac{1}{360} \text{ de } \hat{V}$$

Así obtenemos el ángulo llamado de un grado sexagesimal cuya simbología es:

$$1^{\circ}$$

De esta definición resultará para los ángulos clasificados anteriormente:

$$\hat{V} = 360 \cdot 1^{\circ} = 360^{\circ}$$
$$\hat{L} = 180 \cdot 1^{\circ} = 180^{\circ}$$
$$\hat{R} = 90 \cdot 1^{\circ} = 90^{\circ}$$
$$\hat{N} = 0 \cdot 1^{\circ} = 0^{\circ}$$

Algunos submúltiplos del grado reciben nombres particulares, ellos son:

$$1 \text{ minuto } = 1' = \frac{1}{60} \cdot 1º$$
$$1 \text{ segundo } = 1'' = \frac{1}{60} \cdot 1' = \frac{1}{3600} \cdot 1º$$

En la práctica también se utilizan como submúltiplos las fracciones decimales del grado, minuto o segundo.

Resultan así expresiones decimales del tipo:

$$\hat{\alpha} = 3º,573 \qquad \hat{\beta} = 12',54 \qquad \hat{\gamma} = 7'',3$$

A modo de ejemplo, obtenemos analíticamente la expresión del ángulo $\hat{\alpha}$ en grados, minutos y segundos:

$$3º,573 = 3º + 0º,573 \overset{(1)}{=} 3º + 0º,573 \cdot \frac{60'}{1º} =$$
$$3º + 34',38 = 3º + 34' + 0',38 \overset{(2)}{=}$$
$$3º + 34' + 0',38 \cdot \frac{60''}{1'} =$$
$$= 3º + 34' + 22'',8 \overset{(3)}{=} 3º34'22'',8$$

Verifica los resultados obtenidos utilizando tu calculadora científica, la cual opera en este sistema en el modo "DEG" (DEGREE)

Problemas de Aplicación

1) Calcula el valor de $\hat{\alpha}$, expresado en grados, minutos y segundos:

a) $\hat{\alpha} = 2°,8 + 17°35'$

b) $\dfrac{5\hat{\alpha} + 8°3'}{2} = 25°,4$

2) a) Realiza el gráfico que corresponda a la siguiente descripción:

d interior al $a\hat{c}b$ que es recto,

$e \notin a\hat{c}b$

$d\hat{c}b = e\hat{c}b, \quad d\hat{c}e = 1\text{Recto}$

b) Calcula la medida de $a\hat{c}d$ y $a\hat{c}e$

3) Determina el valor del ángulo cuyo doble es igual a su complementario disminuido en 20°.

> **Recuerda:**
> **Ángulos complementarios:** dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus medidas es la medida de un ángulo recto.
> **Ángulos suplementarios:** dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus medidas es la medida de un ángulo llano.

4) La suma entre el triple de la medida de un ángulo y la medida del suplemento del mismo es 210°. Hallar la medida del mismo.

5) Calcula la medida de los ángulos complementarios, sabiendo que uno de ellos es la mitad del otro.

6) Halla la medida de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, teniendo en cuenta que son complementarios y que la medida de $\hat{\alpha}$ es igual a la cuarta parte de la medida de $\hat{\beta}$.

7) Si $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=72º\,33'$ y el complemento de $\hat{\alpha}$ es $\hat{\omega}=57º\ 44'\ 42''$,calcula $\hat{\beta}$

8) Si el ángulo $\hat{\alpha}$ mide 24° 10’, calcula el triple de $\hat{\beta}$ siendo $\hat{\beta}=\frac{1}{2}\hat{\alpha}+30°10'$.

9) Si $\hat{\alpha}=179°\,59'\,59''$ y $\hat{\beta}=30°\,10'\,20''$; calcula:

a) El complemento de $\hat{\beta}$ más el suplemento de $\hat{\alpha}$.

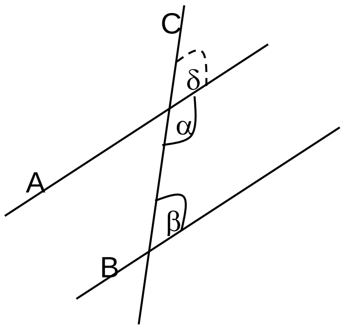
b) La mitad de $\hat{\alpha}$ menos la quinta parte de $\hat{\beta}$.

PROPIEDAD

“Los ángulos conjugados internos (externos) determinados por dos rectas paralelas cortadas por una tercera son suplementarios”.

Datos o hipótesis: H) $A /\!/ B$ y C transversal

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son conjugados internos



> Para realizar la demostración partimos de ciertos datos o información ***(HIPÓTESIS)*** que se consideran verdaderos y llegamos a un resultado o conclusión ***(TESIS)*** mediante el razonamiento ***(DEMOSTRACIÓN)***

Tesis: T) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 2R$

Demostración: D)

Consideramos un ángulo auxiliar $\hat{\delta}$ adyacente al ángulo $\hat{\alpha}$
Completa :

AFIRMACIONES	JUSTIFICACIONES
(1) $\hat{\alpha} + \hat{\delta} =$	pues...
(2) $\hat{\delta} =$	pues son ………………………entre A//B$\not\parallel$C
$\hat{\alpha} +$ ...... $=$	sustituimos en (1) por (2)

Con lo que queda demostrada la propiedad para ángulos conjugados internos.

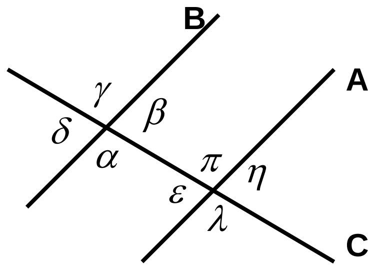
Te proponemos que realices la demostración para los ángulos conjugados externos

10) Si $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos conjugados internos entre rectas paralelas intersecadas por una tercera y $\hat{\alpha} = \frac{2}{3}\hat{\beta}$. Calcula la medida de los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

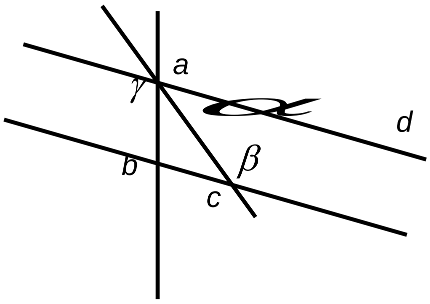
11) Los ángulos $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\omega}$ son conjugados externos entre paralelas y la medida de $\hat{\varepsilon}$ es la cuarta parte de la medida de $\hat{\omega}$. Calcula $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\omega}$.

12) Siendo A // B$\not\parallel$C, en cada apartado, calcular la medidas de los ángulos de la figura.

a) $\hat{\pi} = 2(51°25'13'',7)$
b) $\hat{\gamma} = 3\ \hat{\eta}$
c) $\hat{\varepsilon} = \frac{1}{6}\hat{\pi}$
d) $\hat{\varepsilon} = 3x$ y $\hat{\gamma} = 12x$



13) En la figura $\overleftrightarrow{ad} // \overleftrightarrow{bc}$



Calcula en cada apartado, según los datos, la medida de los ángulos interiores del $\overset{\Delta}{abc}$

a) $\hat{\alpha}$ = 29°35’18´´,7

$\overrightarrow{ac}$ bisectriz de $b\hat{a}d$

b) $\hat{\alpha}$ = 2x + 30°

$\hat{\beta}$ = 6x

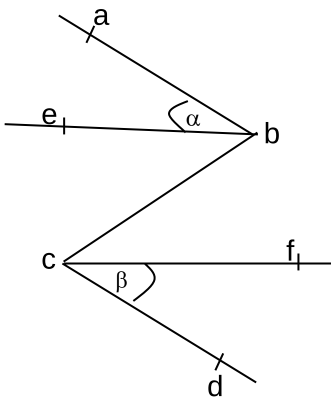
$\hat{\gamma}$ = 5x

14) Sabiendo que $\overleftrightarrow{ab} \perp \overleftrightarrow{bc}$ y $\overleftrightarrow{bc} \perp \overleftrightarrow{cd}$ y $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

Demostrar que:

a) $\overleftrightarrow{ab} // \overleftrightarrow{cd}$

b) $\overleftrightarrow{be} // \overleftrightarrow{cf}$

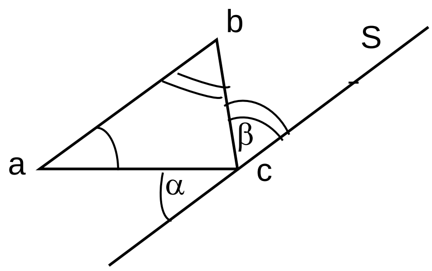


1. SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO

TEOREMA:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es un llano, o sea 2 R

Datos o hipótesis: H) $\overset{\Delta}{abc}$
Conclusión o tesis: T) $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=2R$
Demostración: D)



Consideramos una recta S paralela al lado opuesto $\overline{ab}$ que pase por un vértice c . Quedan determinados dos ángulos consecutivos al $\hat{c}$ que llamaremos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

Completa para obtener la demostración

AFIRMACIONES	JUSTIFICACIONES
(1) $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{c}=$..........	pues...
$\hat{\alpha}=\hat{a}$	son...
.	
$\hat{\beta}=$........	son alternos internos entre $\overleftrightarrow{ab} // S \wedge \overleftrightarrow{bc}$
$\hat{a}+$.......... .+.......... ... =..........	sustituimos en (1) $\hat{\alpha}$ por $\hat{a}$ y $\hat{\beta}$ por $\hat{b}$

con lo que queda demostrado el teorema.

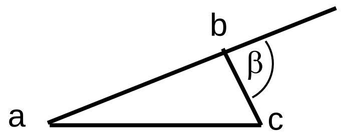
Observación: como habrás notado, la demostración de este teorema supone la aceptación del quinto postulado de Euclides: *por un punto exterior a una recta pasa una y solo una paralela a dicha recta*

TEOREMA DEL ANGULO EXTERIOR DE UN TRIÁNGULO

Todo ángulo exterior de un triángulo es congruente con la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes y mayor que cualquiera de ellos

H) $\overset{\Delta}{abc}$ y $\hat{\beta}$ ángulo exterior de $\hat{b}$

T) $\hat{\beta} = \hat{a} + \hat{b}$; $\hat{\beta} > \hat{a}$: $\hat{\beta} > \hat{b}$



Demostración:

(1) $\hat{\beta} + \hat{b} = 2R$ porque …………………………………………………………….

(2) $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 2R$ porque ………………………………………………………..

Igualando las expresiones (1) y (2) resulta

$$\hat{\beta} + \hat{b} = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$$

Observamos que a ambos miembros está sumando el mismo ángulo por lo tanto

$$\hat{\beta} = \hat{a} + \hat{c}$$

Además el resultado de una suma es mayor que cada sumando por lo tanto

$\hat{\beta} > \hat{a}$ y $\hat{\beta} > \hat{b}$

2. CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Contesta las siguientes propuestas justificando tu respuesta:

En el triángulo $\overset{\Delta}{abc}$

- ¿qué clase de ángulos serán $\hat{b}$ y $\hat{c}$ si $\hat{a}$ es recto u obtuso?. ....

....

- si $\hat{a}$ es recto ¿qué puedes decir de $\hat{b}$ y $\hat{c}$?...

....

La respuesta a estas cuestiones constituye la demostración de los corolarios del teorema que a continuación enunciamos.

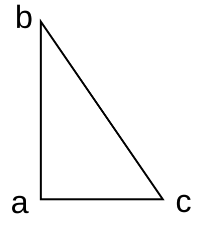
Sólo un ángulo de un triángulo puede ser recto u obtuso

Si un ángulo de un triángulo es recto, los otros dos son complementarios

3.1 Según sus ángulos

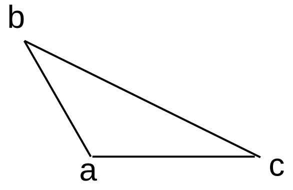
Estas propiedades permiten efectuar una clasificación de los triángulos atendiendo a sus ángulos.

Podemos definir:



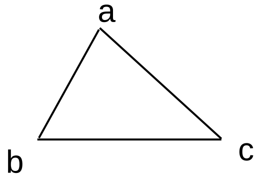
Todo triángulo con un ángulo recto se denomina **rectángulo**

A los lados del ángulo recto se los denomina ***catetos***, al lado opuesto al ángulo recto, ***hipotenusa***



Triángulo **obtusángulo** es el que posee un ángulo obtuso

Resulta, de acuerdo con uno de los corolarios anteriores que el triángulo obtusángulo posee dos ángulos agudos.



*Triángulo **acutángulo** es el que posee los tres ángulos agudos*

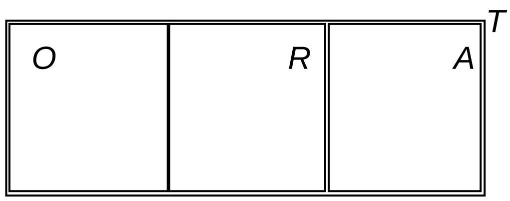
En base a estas definiciones, en el conjunto de los triángulos pueden distinguirse los siguientes subconjuntos no vacíos.

$T = \{ \text{ triángulos } \}$

$O = \{ \text{ triángulos obtusángulos } \}$

$R = \{ \text{ triángulos rectángulos } \}$

$A = \{ \text{triángulos acutángulos } \}$



Observa que:

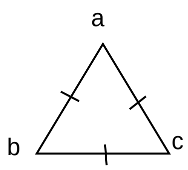
$$\left.\begin{array}{l} O \cap R = \varnothing \\ R \cap A = \varnothing \\ O \cap A = \varnothing \\ O \cup R \cup A = T \end{array}\right\} \Rightarrow$$

O, R y *A* determinan una partición de T en 3 subconjuntos

3.2 Según sus lados

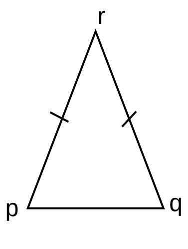
Teniendo en cuenta la clasificación de los triángulos según sus lados, surge:

Todo triángulo que posee sus tres lados congruentes se denomina **equilátero**



$$\overline{ab} = \overline{ac} = \overline{bc}$$

Todo triángulo que posee al menos dos de sus lados congruentes se denomina **isósceles**

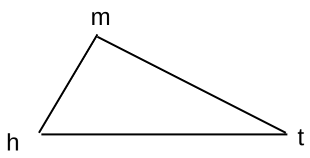


$\overline{rp} = \overline{rq}$

El lado $\overline{pq}$ es **base**

En un triángulo isósceles al lado desigual se lo llama **base**

Todo triángulo que no posee ningún par de lados congruentes se denomina **escaleno**



Simbolizamos a los conjuntos

I = { triángulos isósceles}

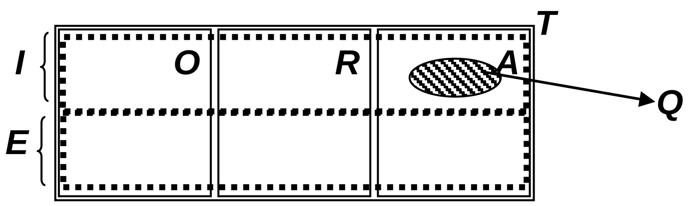
E = { triángulos escalenos}

Q = { triángulos equiláteros }

De la definición, es inmediato que :

$$Q \subset I \qquad I \cap E = \varnothing \qquad \wedge \qquad I \cup E = T$$

En un mismo diagrama se muestra la partición de *T* (según sus ángulos) en 3 subconjuntos, en forma vertical, y su partición en 2 subconjuntos (según sus lados), en forma horizontal; ubicando el conjunto de los triángulos equiláteros incluido en $A \cap I$



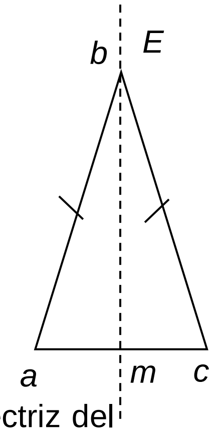
- ⇨ Justifica por qué $Q \subset (A \cap I)$
- ⇨ En el diagrama de clasificación de los triángulos, marca como se te indica, dónde se encuentra un triángulo con las características siguientes:

- Rectángulo isósceles, con un o
- Rectángulo escaleno, con un ®
- Obtusángulo isósceles, con un ⊗
- Obtusángulo escaleno, con un ∅
- Isósceles equiángulo, con un *

3. **PROPIEDAD DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES**:

La bisectriz del ángulo opuesto a la base del triángulo isósceles está incluida en la mediatriz de la base.

Sea $a\overset{\Delta}{b}c$ un triángulo en el cual $\overline{ab} = \overline{bc}$, o sea isósceles y consideremos la S_E tal que el eje E incluya a la bisectriz del $a\hat{b}c$



Entonces

$$\left.\begin{array}{l} s_E\left(\overrightarrow{ba}\right) = \overrightarrow{bc} \\ \text{y como por dato} \quad \overline{ba} = \overline{bc} \end{array}\right\} \Rightarrow s_E(a) \overset{(1)}{=} c \quad \Rightarrow s_E(c) \overset{(1)}{=} a \quad (*)$$

(1) por P_5

Si $S_E(a) = c$ entonces E es la mediatriz de $\overline{ac}$

Si llamamos con ***m*** al punto de intersección de la base con la bisectriz del ángulo opuesto a la misma, lo anterior lo podemos simbolizar así:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{ab} = \overline{bc} \\ m \in \overline{ac} \\ \overrightarrow{bm} \text{ bisectriz de } a\hat{b}c \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{bm} \perp \overline{ac} \quad \text{y} \quad \overline{am} = \overline{mc}$$

además

	s_E
b	b por pertenecer al eje
a	c por (*)
c	a por (*)
$b\hat{a}c$	$b\hat{c}a \overset{(3)}{\Rightarrow} b\hat{a}c = b\hat{c}a \quad (**)$

(3) por definición de congruencia

por la conclusión (**) podemos afirmar que

Los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles son congruentes

Se puede justificar también que:

> ***Es suficiente que un triángulo posea dos ángulos congruentes para asegurar que es isósceles***

Las dos últimas propiedades pueden reunirse estableciendo que:

> ***En todo triángulo a ángulos congruentes se le oponen lados congruentes y recíprocamente***

⇨ Demuestra que todo triángulo equilátero es equiángulo

<u>Problemas de aplicación</u>

En lo sucesivo, encontrarás problemas cuyo enunciado se individualiza con el símbolo ($*$). Esto significa que es una propiedad muy importante en la resolución de futuros problemas

15) Indica las características geométricas de los triángulos pertenecientes a cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $O \cap I$ c) $I \cap A$ e) $R \cap E$
b) $R \cap I$ d) $E \cap A$ f) $Q \cap A$

16) Establece la falsedad o veracidad de cada una de las siguientes expresiones, justificando tu respuesta

a) $a\overset{\Delta}{b}c$ equilátero $\Rightarrow$ $a\overset{\Delta}{b}c$ isósceles

b) $a\overset{\Delta}{b}c$ isósceles $\Rightarrow$ $a\overset{\Delta}{b}c$ equilátero

c) $a\overset{\Delta}{b}c$ equilátero $\Leftrightarrow$ $a\overset{\Delta}{b}c$ equiángulo

d) Cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60º

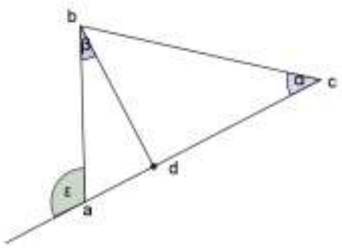
17) Dado $\overline{ab}$, construye un triángulo isósceles de base $\overline{ab}$ ¿Es único?

18) Calcula la medida de los ángulos de cualquier triángulo rectángulo isósceles.

19) (∗) Demuestra que si los ángulos conjugados internos (externos) entre 2 rectas coplanares intersecadas por una tercera son suplementarios, dichas rectas son paralelas.

20) Demuestra que las bisectrices de los ángulos conjugados internos entre paralelas son perpendiculares.

21)

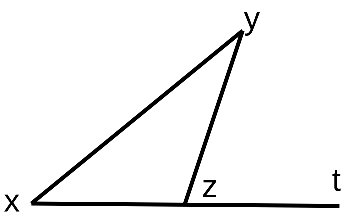


En la figura $\overset{\triangle}{bdc}$ es rectángulo en $\hat{d}$,

$\hat{\alpha} = 40º$ y $\hat{\beta} = 26º$

Halla la medida de $\hat{\varepsilon}$, $b\hat{a}c$ y $a\hat{b}c$.
Justifica los pasos que realiza

22)

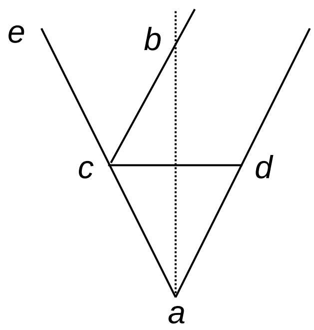


Si *z* punto medio de $\overline{xt}$ y $\overline{zt} = \overline{zy}$

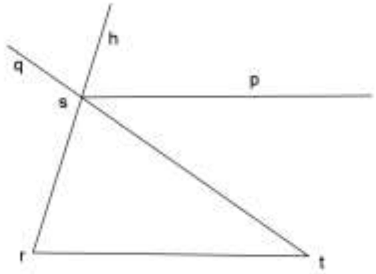
demuestra que $\hat{x} = \frac{1}{2}\, y\hat{z}t$

23) En la figura es $\vec{ab}$ bisectriz de $c\hat{a}d$, $\vec{cb}$ bisectriz de $e\hat{c}d$, $c\hat{a}d = 32°$ y $c\hat{d}a = 51°$

Calcula la medida de $b\hat{c}d$



24) Calcula la medida de los ángulos interiores del $\overset{\Delta}{rst}$, sabiendo que $\overleftrightarrow{rt} \,//\, \overleftrightarrow{sp}$, $q\hat{s}h = 81º$ y $p\hat{s}t = 34º$. Justifica el procedimiento que realizas



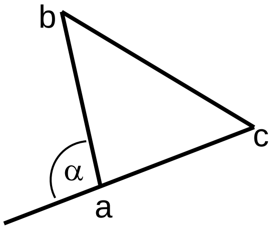
25) Si $\overset{\Delta}{abc}$ es isósceles con $\overline{ab} = \overline{bc}$ y $\hat{b} = 68º\ 20'\ 12''$

a) calcula la medidas de $\hat{a}$ y $\hat{c}$.

b) determina la medida del ángulo exterior correspondiente al $\hat{c}$

26) En un triángulo $\overset{\Delta}{mnp}$ es $\hat{m} = \frac{2}{3}\hat{p}$ y $\hat{p} = \hat{n}$. Determina las medidas de cada uno de los ángulos del triángulo.

27)



Sabiendo que $\hat{b} = \hat{c}$ y $\hat{\alpha} = 102º,6$; calcula cada uno de los ángulos del triángulo.

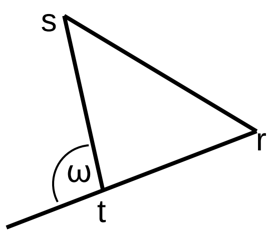
28) En un triángulo, un ángulo interior es de 35º 40’ y un ángulo exterior no adyacente a él es de 150º 10’. Determina la medida de los otros dos ángulos interiores.

29) Calcula la medida de los ángulos interiores del triángulo $\overset{\Delta}{rst}$ y del ángulo exterior $\hat{\omega}$ ubicados según muestra el gráfico, para cada caso:

a) $\hat{r} = 2\hat{x} + 14º$ $\quad \hat{s} = 5\hat{x} - 3º$ $\quad \hat{t} = 6\hat{x} + 13º$

b) $\hat{\omega} = 3\hat{x} + 46º$ $\quad \hat{t} = 6\hat{x} - 28º$ $\quad \hat{r} = \hat{s}$

c) $\hat{\omega} = 145º$ $\quad \hat{r} = 2\hat{x}$ $\quad \hat{s} = 2\hat{r}$

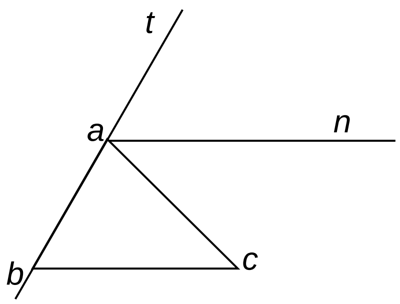


30) En un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos es el cuádruplo del otro. ¿Cuál es la medida de cada uno de ellos?

31) (∗) Demuestra que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°

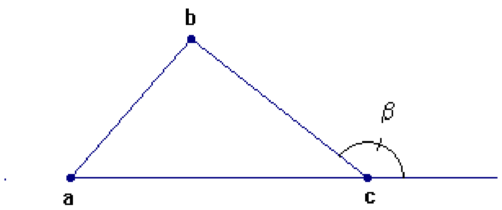
32) Si $\overleftrightarrow{an} // \overleftrightarrow{bc}$ y $\overrightarrow{an}$ biseca a $t\hat{a}c$

demuestra que $\overset{\triangle}{abc}$ es isósceles



33) Si el ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles es de 114º, calcula los ángulos de la base.

34) Si $b\hat{a}c = 48°22'32''$; $a\hat{b}c = 3b\hat{a}c - 90°35'$. Calcula: $a\hat{b}c$; $\hat{\beta}$ y $b\hat{c}a$.

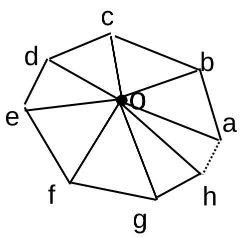


4. ÁNGULOS INTERIORES Y EXTERIORES DE UN POLÍGONO CONVEXO

5.1 Suma de los ángulos interiores de un polígono

- Dibuja un cuadrilátero, un pentágono, un hexágono y un octógono, toma en cada uno de ellos un punto interior y únelo con segmentos a sus vértices ¿Cuántos triángulos quedan determinados?..............................
¿Qué regularidad descubres?...
....

Consideremos un polígono convexo cualquiera de *n* lados, se observa que al trazar todos los segmentos desde un punto interior del mismo, queda descompuesto en *n* triángulos.



La suma de los ángulos interiores de dichos triángulos será 2R n.
Entonces la suma de los ángulos interiores del Polígono de n lados, que simbolizamos con S_n resulta:

$$S_n = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} + ... = 2Rn - 4R$$

(4R es la suma de los ángulos de vértice o)

Expresando 4 R = 2. 2R

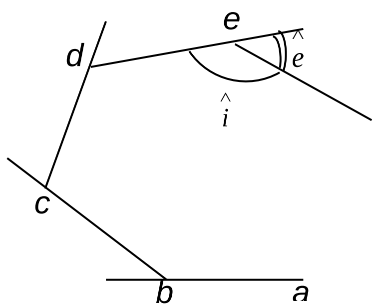
S_n = **2R**n – 2.**2R** = 2R.(n - 2) (Por Propiedad distributiva)

$$\boxed{S_n = 2\,R\,(n - 2)}$$

5.2 Suma de los ángulos exteriores de un polígono

> *La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es de 4 R*

- Completando estas proposiciones demostrarás esta propiedad



En cada vértice un ángulo interior ($\hat{i}$) y su exterior correspondiente ($\hat{e}$) suman .... o sea $\hat{i} + \hat{e}$ =.................. (*)

En un polígono de *n* lados, hay .... vértices, en cada vértice existe un ángulo interior y uno exterior que verifican (*) por lo cual la suma de todos los ángulos interiores (S_n) y la de todos los exteriores (S_e) es............, o sea

$$S_n + S_e = 2R \cdot n \quad (1)$$

y como se sabe que $S_n = 2R.n - 4R$ reemplazando en (1)

resulta : $2R.n - 4R + S_e = 2Rn \Rightarrow S_e = 2R\,n - 2R\,n + 4R$

o sea : $S_e = 4R$

Problemas de aplicación

35) En un cuadrilátero abcd es $\hat{a} = 2\hat{b}$, $\hat{c} = \hat{d} = 3\hat{b}$. Determina la medida de cada uno de los ángulos del cuadrilátero.(Sugerencia : plantea la ecuación en función del $\hat{b}$)

36) En un hexágono tres de sus ángulos interiores suma 427º 49´ 15´´. Los otros tres ángulos son congruentes. ¿Cuál es la medida de cada uno de esos ángulos?

37) ¿En qué polígono la suma de sus ángulos interiores es de 1080º?

38) Completa la siguiente tabla

n	S_n
3	....
13	....
....	1800º
....	2340º
....	3240
....	30 R

39) Si recordamos que

Un polígono es regular si y solo si sus lados y ángulos son congruentes

determina la medida de un ángulo interior de

a) un pentágono regular
b) un heptágono regular

40) ¿En qué polígono regular el ángulo exterior es $\frac{1}{5}$ del ángulo interior adyacente a él?

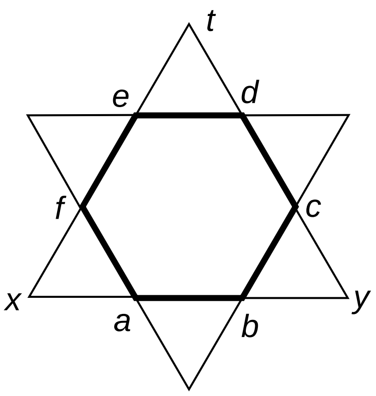
41) Si contestas afirmativamente las siguientes preguntas, agrega cuántos lados tiene el polígono regular en ese caso:

a) ¿Puede ser 45º la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
b) ¿Puede ser 100º la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
c) ¿Puede ser 140º la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
d) ¿Puede ser 60º la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
e) ¿Puede ser 135º la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
f) ¿Puede ser 156º la medida de un ángulo interior de un polígono regular?

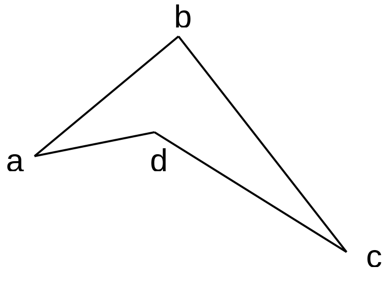
42) Sea el hexágono regular

de la figura *abcdef.*

Demuestra que $\overset{\triangle}{xyt}$ es equilátero.



43) Demuestra que el cuadrilátero abcd, la suma de los ángulos $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$ es igual al ángulo convexo $\hat{d}$.



La revisión y actualización de este apunte estuvo a cargo de los profesores:
Verónica Filotti y María del Luján Martínez

Bibliografía :

- GEOMETRÍA METRICA- RELACIONES MÉTRICAS de Susana S. de Hinrichsen, Noemí B. de González Beltrán y Liliana L de Cattaneo
- TRIGONOMETRÍA de Juan Carlos Bue, Daniela Candio, Verónica Filotti, Noemí Lagreca y Ma. del Luján Martínez. Impreso por Recursos del IPS
- TRIGONOMETRÍA de : A. Nassini ,L de Cattaneo y N. Buschiazzo.
- MATEMATICA 1 (9º Edición) de Ana M. Bogani, Elsa Di Estévez y Mary G. Oharriz. Editorial Plus Ultra. Año 1995
- Carpeta de Matemática 8 (1º edición)de Garaventa, Legorburu, Rodas y Turano. Editorial Aique. Año 2001