Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Cónicas

5º Año

Cód. 1502-15

Prof. Betina Cattaneo
Prof. Noemí Buschiazzo
Prof. Jorgelina Oses
Res. de Problemas: Prof. Natalia Ferrari
Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

LAS CÓNICAS EN COORDENADAS

INTRODUCCIÓN

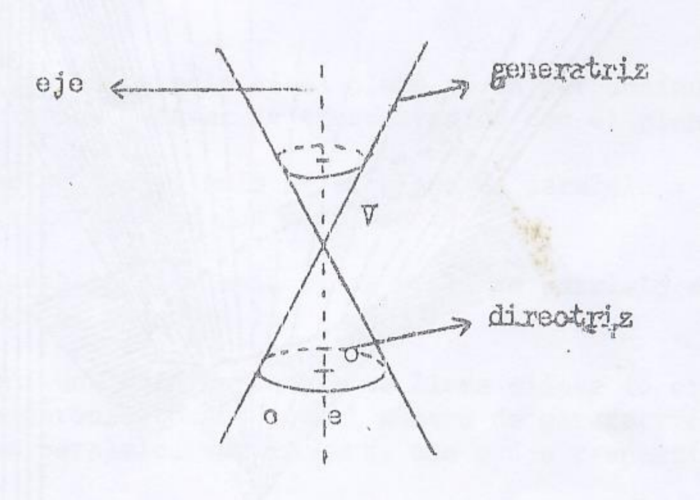
La geometría descriptiva fue creada por los artistas renacentistas como medio para aprender y representar el espacio tridimensional. La representación mental del espacio tridimensional se obtiene mediante una larga evolución que no es innata como dicen las investigaciones sicológicas y antropológicas.

Resulta interesante analizar cómo el álgebra puede colaborar con la geometría, pero recordando siempre no perder de vista los conceptos geométricos y así poder permitir la interacción entre la intuición y el razonamiento.

En esta oportunidad trabajaremos con curvas a las que llamamos **secciones cónicas** o simplemente **cónicas**.

Dichas secciones reciben tal nombre porque se definen a partir de una **superficie cónica recta**, cuya definición damos a continuación:

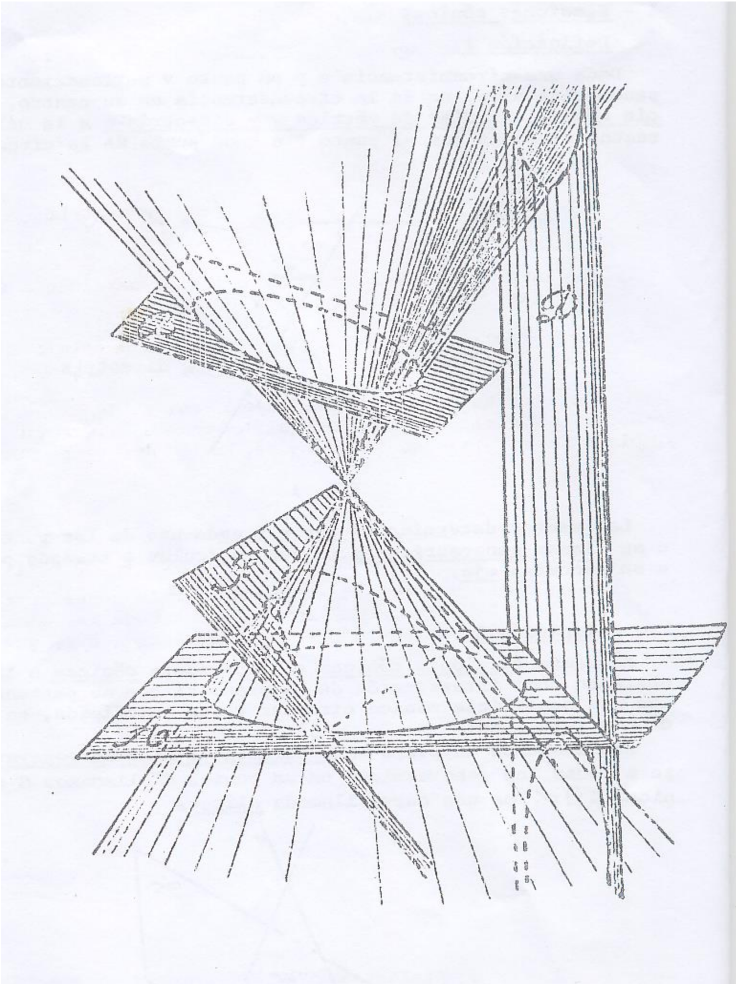
Dados una circunferencia *C* (llamada directriz) y un punto *v* (llamado vértice) perteneciente a la recta perpendicular al plano de la directriz que pasa por el centro O (llamada eje), se llama **superficie cónica circular recta de vértice *v* y directriz *C*** a la unión de todas las rectas trazadas por el punto *v* a cada punto de la circunferencia.



Las rectas determinadas por *V* y cada uno de los puntos de la directriz *C* se denominan **generatrices (*g*)**

Conocidos estos elementos estamos en condiciones de definir a las cónicas como intersección de la superficie cónica recta con un plano que no pase por su vértice.

Observemos el dibujo, y leamos el cuadro siguiente para conocer la condición que cumple el plano (π) para la obtención de cada cónica y el nombre de las misma.



Posición de π con respecto a algún elemento de la superficie cónica		Cónica obtenida
Perpendicular al eje	$\pi \perp e$	**Circunferencia**
Que no sea paralelo a ninguna de sus generatrices	$\pi \not\perp e$ $\forall g,\ g \nparallel \pi$	**Elipse**
Es paralelo a una sola generatriz	$\pi /\!/ g$	**Parábola**
Es paralelo al eje e	$\pi /\!/ e$	**Hipérbola**

El análisis anterior se realizó considerando que el plano no pasara por el vértice, ¿qué ocurre si el plano pasa por el vértice de la superficie cónica?

Será nuestro propósito trabajar con las cónicas pero a partir de su identificación con una ecuación. Para lograrlo será preciso apelar al uso de las coordenadas cartesianas, que a partir de plantear la bisección entre puntos y pares ordenados de números nos provee de un instrumento para vincular cónicas con ecuaciones.

CIRCUNFERENCIA

Para lograr nuestro objetivo recordemos la definición de la circunferencia como L.G.[1]

> ***Dado un punto fijo C del plano y un número positivo r, llamamos circunferencia de centro C y radio r al conjunto de los puntos P del plano que equidistan r unidades de C***

Escribiendo simbólicamente la definición de circunferencia de centro C y radio r, resulta:

$$C(C;\ r) = \{P(x;\ y) /\ \operatorname{dist}(P;\ C) = r;\ r > 0\}$$

Ecuación cartesiana o canónica de la Circunferencia

Para poder encontrar la ecuación cartesiana de esta cónica, es necesario fijar un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal (Figura 5). En este sistema y de acuerdo a la definición de circunferencia como L.G. todo punto P(x; y) que pertenezca a la misma deberá verificar que:

$$\operatorname{dist}(P;\ C) = r$$

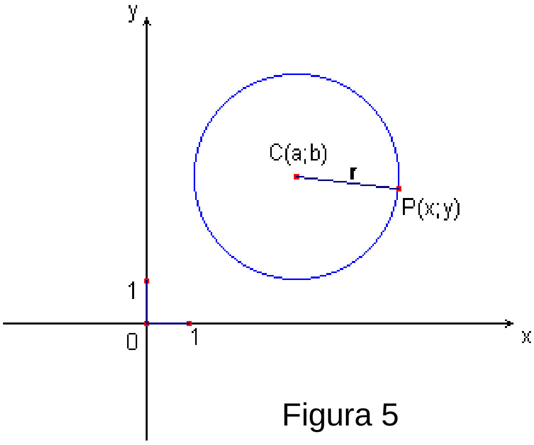


Figura 5

escribiendo esta ecuación en función de la distancia entre puntos del plano coordenado[2] resulta:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

esta es la ecuación de la circunferencia, pero su expresión puede ser transformada en una forma más simple, para ello elevamos al cuadrado ambos miembros y nos queda:

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Ecuación canónica de la circunferencia

---

[1] Lugar geométrico (L.G.) es el conjunto de todos los puntos y solo aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones dadas.

[2] La distancia entre dos puntos del plano es el módulo del vector que ellos determinan, es decir

$$\operatorname{dist}(P_0;P_1) = |\overline{P_0P_1}| = P_0P_1 = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}$$

Actividades:

1. Determina la ecuación y gráfica de la circunferencia que tiene:
    a) centro en el punto C(0; 0) y radio 4
    b) centro en el punto C(2; -1) y radio 5
    c) centro en C(1; 2) y pasa por el punto (2; 3)
    d) diámetro AB siendo A(-6; 7) y B(-1; -1) .

2. Determina cuáles de las siguientes ecuaciones representan una circunferencia. En caso afirmativo, determina radio; coordenadas del centro y gráfica.
    a) $(x-2)^2+(y+2)^2=16$
    b) $x^2 + 2x + y^2 - 3y - 35 + 9/4 = 0$
    c) $(x+5)^2+(y-2)^2=0$
    d) $x^2+y^2+8x+6y=0$
    e) $x^2+(y-3)^2=8$
    f) $x^2+y^2-2x+8y+22=0$
    g) $x^2+y^2=25$
    h) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y + 11 = 0$
    i) $x^2+y^2+2x-6y+10=0$

3. Determina la ecuación de la circunferencia que
    a) tiene su centro sobre la recta de ecuación $3x - y + 6 = 0$ pasa por los puntos P(2; -1) y Q(-9 ; 0).
    b) pasa por los puntos (2; 1); (3; 4) y (-2; 5). Determina su centro y radio.

4. Dadas las circunferencias $x^2+y^2-8x-2y+8=0$ y $x^2+y^2+4x+2y+1=0$. Determina la ecuación de la recta que pasa por sus centros.

5. Determina la ecuación de la circunferencia que circunscribe al triángulo cuyos lados están contenidos en las rectas de ecuaciones $x+2y-3=0$ y $3x-y-2=0$, y su centro es el punto (0; -2)

6. Dada la circunferencia $x^2+y^2-8x+6y+21=0$:
    a) encuentra dos puntos que pertenezcan a ella
    b) ¿el punto (1; 0) pertenece a la circunferencia?

7. Determina, en cada caso, la ecuación de la circunferencia y realiza una representación gráfica previa a la resolución:
    a) que pasa por los puntos (0; 9) y (1 ; 2) y es tangente a la recta x = 2
    b) que pasa por el punto (-4; -2) y es tangente a los ejes coordenados
    c) circunscripta al triángulo que forma la recta $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$ con los ejes coordenados

8. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, indicando previamente qué representa cada una de las ecuaciones:

a) $\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2} \\ -2x+3y=7 \end{cases}$

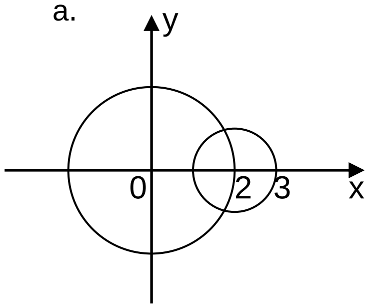
b) $\begin{cases} \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \\ y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+3x-y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$

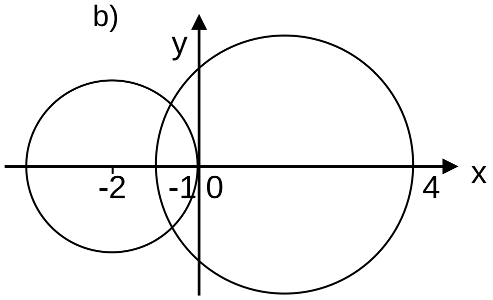
d) $\begin{cases} 4x^2+4y^2+16x+16y=-28 \\ 2x+3y=2 \end{cases}$

9. Dados los siguientes gráficos, determina los sistemas de ecuaciones que los representan en cada caso:

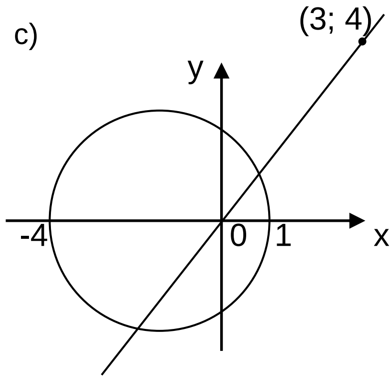
a.



b)



c)



ELIPSE

Recordemos la definición de esta cónica como L.G.:

> ***Dados en el plano dos puntos fijos (F1 y F2) y un número real positivo al que nombraremos 2a, llamamos elipse al conjunto de los puntos P del plano, cuyas distancias a los dos puntos fijos sumadas es una constante e igual a 2a***

Acordemos algunos nombres:

- A los puntos fijos los denominamos **focos**
- La distancia entre ellos es la **distancia focal** y la indicaremos: $\operatorname{dist}(F_1;F_2)=2c$ y a la recta que los contiene eje focal.

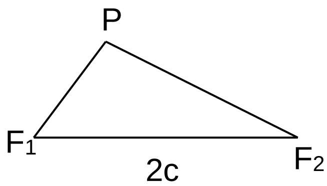
escribiendo simbólicamente la definición de elipse de focos F_1 y F_2 y la suma constante 2a, a la que expresaremos $E(F_1;F_2;a)$, resulta:

$$E(F_1;F_2;a)=\{P\,/\,P\in\alpha : F_1;F_2\in\alpha \wedge a\in R^+ \wedge F_1P+F_2P=2a\} \qquad (*)$$

F_1P representa la distancia entre F_1 y P

Dado un punto cierto P de la elipse, si lo unimos con los focos queda determinado un triángulo que, como se sabe, por la desigualdad triangular (*Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos*) resulta:

$$F_1P + F_2P > F_1F_2 = 2c \qquad (¤)$$



Por la definición de elipse sabemos que

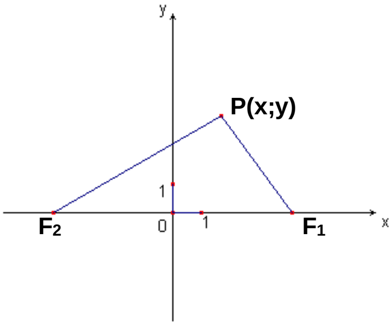
$$F_1P + F_2P = 2a \qquad (¤¤)$$

de (¤) y (¤¤) resulta que

$$2a > 2c \Leftrightarrow a > c$$

Ecuación cartesiana de la Elipse con centro en (0; 0) y focos en el eje de las abscisas

Para poder encontrar la ecuación cartesiana de esta cónica, es necesario fijar un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal. Consideraremos el eje de la abscisas coincidente con el eje focal. El eje de las ordenadas perpendicular al de las abscisas pasando por el punto medio de dicho eje. Es evidente que llegaremos a la ecuación de una elipse particularmente ubicada.



En este sistema ¿cuáles son las coordenadas de los focos?, recordando que la distancia focal la llamamos 2*c* resulta que $F_1(c;0)$ y $F_2(-c;0)$

De acuerdo a la definición de elipse todo punto P(x;y) que pertenezca a la misma deberá verificar que:

$$F_1P + F_2P = 2a$$

escribiendo esta ecuación en función de la distancia entre puntos del plano coordenado resulta:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Trabajando algebraicamente y llamando: $a^2 - c^2 = b^2$, obtenemos:

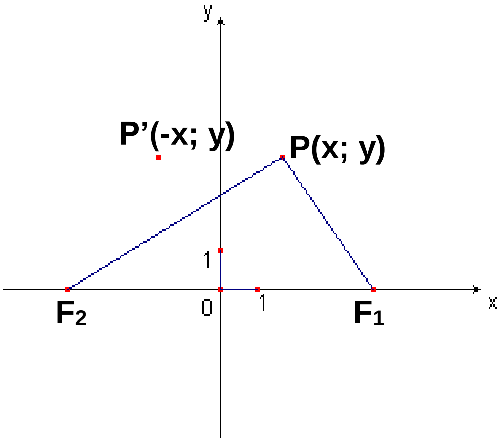
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación canónica de la elipse con focos en el eje de las abscisas

a. Simetrías de una Elipse

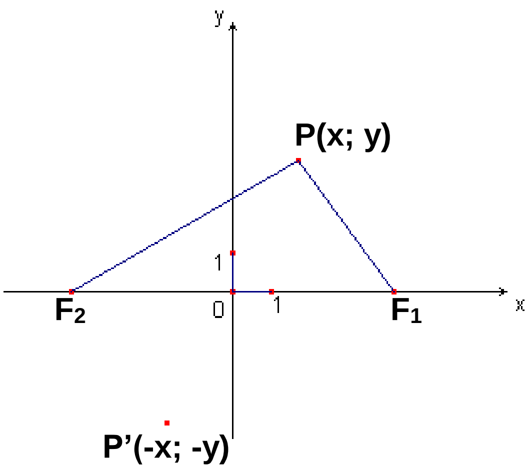
1. Simetría con respecto al eje y

$\forall P(x;y) \in E(F_1;F_2;a) \Rightarrow P'(-x;y) \in E(F_1;F_2;a) \Rightarrow$ que los puntos cuyas abscisas son opuestas y tienen la misma ordenada pertenecen a la elipse, es decir, puntos simétricos respecto al eje y, por lo tanto **la gráfica de una elipse centrada en el origen de coordenadas es simétrica respecto al eje y.**



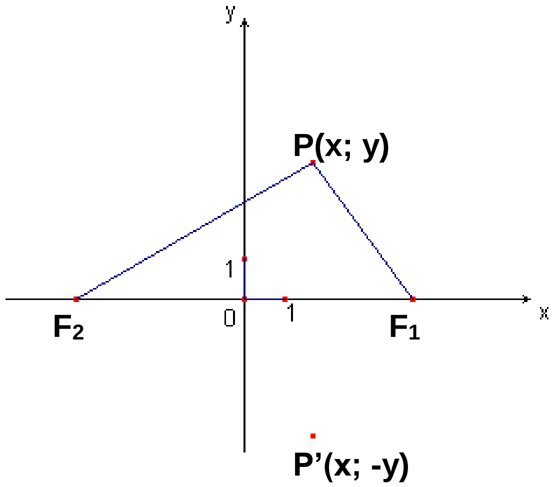
2. Simetría con respecto al origen

$\forall P(x;y) \in E(F_1;F_2;a) \Rightarrow P'(-x;-y) \in E(F_1;F_2;a) \Rightarrow$ que los puntos cuyas abscisas son opuestas y tienen ordenadas opuestas pertenecen a la elipse, es decir, puntos simétricos respecto al origen, por lo tanto **la gráfica de una elipse centrada en el origen de coordenadas es simétrica respecto al origen.**



3. Simetría con respecto al eje x

$\forall P(x;y) \in E(F_1;F_2;a) \Rightarrow P'(x;-y) \in E(F_1;F_2;a) \Rightarrow$ que los puntos cuyas ordenadas son opuestas y tienen abscisas iguales pertenecen a la elipse, es decir, puntos simétricos respecto al eje x, por lo tanto **la gráfica de una elipse centrada en el origen de coordenadas es simétrica respecto al eje x.**



De lo expuesto podemos concluir que: La elipse tiene centro de simetría y es el origen de coordenadas.

b. Intersección con los ejes coordenados

1. Intersección con el eje x

Para buscar los puntos donde la curva corta al eje x debemos buscar los puntos de ordenada cero, es decir:

$$\text{Si} \quad y=0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a$$

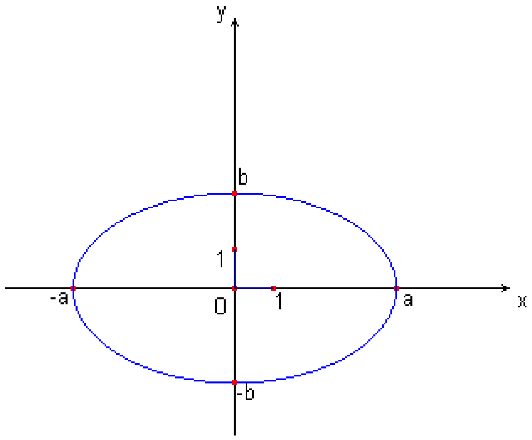
Los puntos $(a;\ 0)$ y $(-a;\ 0)$, que son los puntos de intersección de la elipse con el eje x se los denomina **vértices** de la misma y al segmento que ellos determinan se lo llama **eje mayor**

2. Intersección con el eje y

Para buscar los puntos donde la curva corta al eje y debemos buscar los puntos de abscisa cero, es decir:

$$\text{Si} \quad x=0 \;\Rightarrow\; \frac{0}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;\Leftrightarrow\; \frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b$$

Los puntos $(0;\ b)$ y $(0;\ -b)$, que son los puntos de intersección de la elipse con el eje y también se los denomina **vértices** y al segmento que ellos determinan se lo llama **eje menor**



c. Ubicación de la curva

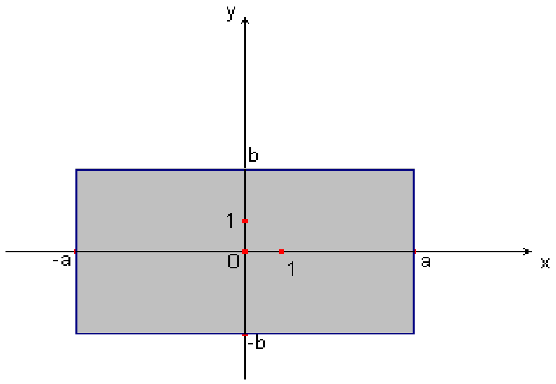
Todos los puntos del plano que pertenezcan a la elipse deben satisfacer su ecuación, es decir

$$P(x;y) \in E(F_1;F_2;a) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Como vemos, esta expresión tendrá sentido cuando $|x| \leq a$; es decir que el subconjunto de puntos del plano cuyas abscisas pertenezcan al intervalo $[-a;\ a]$ serán puntos de la elipse.

En forma análoga la condición que deben asumir las ordenadas de ellos, son $|y| \leq b$, o sea $-b \leq y \leq b$.

De lo anterior, podemos concluir que la curva estará ubicada en la región sombreada que muestra el siguiente gráfico:



d. Excentricidad de la elipse

Se define como excentricidad ε de una curva E al cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor a, es decir

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

como $a > c$, resulta

$$\varepsilon < 1$$

Es fácil de ver que cuando los focos de la curva están más próximos entre si, la elipse se aproximará a una circunferencia.

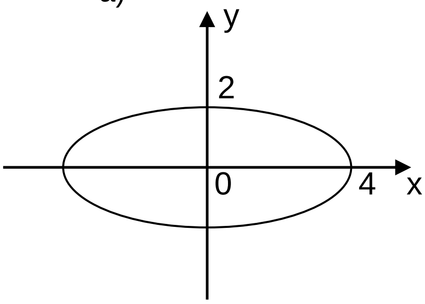
Observación:

Si la elipse tiene los focos en el eje de las ordenadas, razonando de manera similar a lo anterior, podemos concluir que su ecuación es $\mathbf{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$

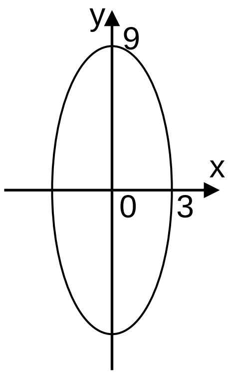
Actividades

1. Determina la ecuación de cada una de las elipses dibujadas.

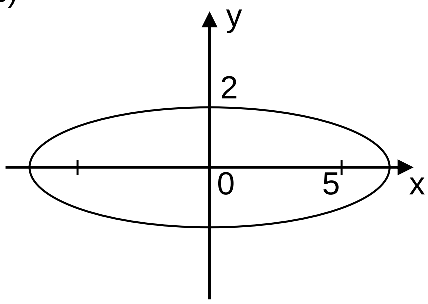
a)



b)



c)



2. Dada la elipse $9x^2 + 5y^2 = 45$, determina:
   a) Sus semiejes
   b) Sus focos
   c) Su excentricidad
   d) Su gráfica

3. Determina en cada caso, la ecuación y gráfica de la elipse, centrada en el origen de coordenadas, que verifica:
   a) uno de sus focos es (4; 0) y uno de sus vértices es (6; 0)
   b) sus semiejes son $\sqrt{3}$ y 1
   c) su eje mayor es 10 y la distancia focal es 8
   d) la distancia focal es 3 y la excentricidad $\frac{1}{3}$
   e) los puntos $\left(4;\ -\sqrt{3}\right)$ y $\left(2\sqrt{2};\ 3\right)$ pertenecen a la elipse

4. Dada la ecuación $36x^2 + 16y^2 = 576$
   a) ¿Es la ecuación de una elipse?
   b) En caso afirmativo, determina:
      i) el semieje mayor
      ii) las intersecciones con los ejes coordenados
      iii) representación gráfica

5. Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas, eje mayor en el eje de las ordenadas y que pasa por los puntos $(-2;\ 1)$ y $\left(\frac{\sqrt{22}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$

6. Determina analítica y gráficamente, los puntos de intersección, si existen, de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ con la recta $x + 2y = 4$.

7. Halla todos los elementos de una elipse centrada en el origen de coordenadas, que pase por el punto (0; 8) y su excentricidad es 0,3. Represéntala gráficamente.

8. Determina la intersección entre:

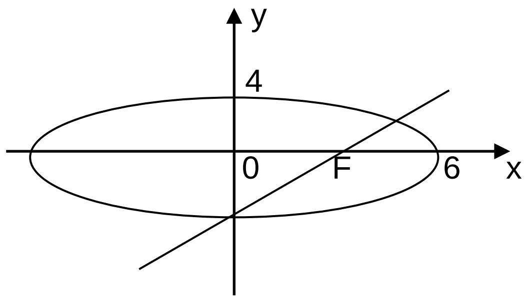
a) las elipses dadas $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ y $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

b) la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ y la circunferencia de centro $(0;\ 0)$ y radio 2

9. Dada la elipse de ecuación $9x^2+4y^2=36$, determina:

a) tres puntos que estén dentro de ella
b) dos puntos que estén fuera de ella
c) un punto que pertenezca a ella

10. Escribe un sistema de ecuaciones que de como resultado la intersección de la elipse y la recta del siguiente dibujo, sabiendo que el punto F, en el cual la recta corta la eje x, es uno de los focos de la elipse.



11. Determina la ecuación de la recta tangente a la elipse $9x^2+y^2=36$ en el o los puntos de la misma de abscisa x = 1

Hipérbola

Dados en el plano dos puntos fijos (F1 y F2) y un número real positivo al que nombraremos 2a, llamamos hipérbola al conjunto de los puntos P del plano, cuyas distancias a los dos puntos fijos, tienen una diferencia, en valor absoluto, constante e igual a 2a

Acordemos algunos nombres:

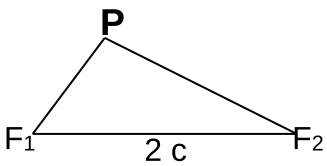
- A los puntos fijos los denominamos **focos**
- La distancia entre los focos es la **distancia focal** y $\text{dist}(F_1;F_2)=2c$

Escribiendo simbólicamente la definición de hipérbola de focos F_1 y F_2 y diferencia constante 2a ($H(F_1;F_2;a)$), resulta:

$$H(F_1;F_2;a)=\{P\,/\,P\in\alpha : F_1;F_2\in\alpha\wedge a\in R^+\wedge|F_1P-F_2P|=2a\} \qquad (*)$$

F_1P representa la distancia entre F_1 y P

Dado un cierto punto *P* de la hipérbola, si lo unimos con los focos queda determinado un triángulo que, como se sabe, por la desigualdad triangular (*Un lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos*) resulta:



$$|F_1P - F_2P| < F_1F_2 = 2c$$

Por la definición del L.G. sabemos que

$$|F_1P - F_2P| = 2a$$

de donde resulta que

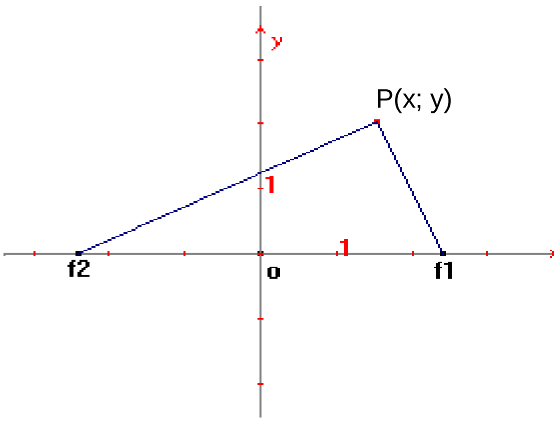
$$2a < 2c$$

cualesquiera sean $a;c \in \Re^+$, resulta:

$$a < c$$

Ecuación cartesiana de la Hipérbola con centro en (0; 0) y focos en el eje de las abscisas

Para poder encontrar la ecuación cartesiana de esta cónica, es necesario fijar un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal. Consideraremos el eje de las abscisas determinado por la recta F_1 y F_2. El eje de la ordenadas perpendicular al de las abscisas pasando por el punto medio del segmento que determinan F_1 F_2.



En este sistema las coordenadas de los focos son $F_1(c;0)$ y $F_2(-c;0)$, recordando que la distancia focal la llamamos 2*c*

De acuerdo a la definición (*) todo punto *P*(*x;y*) que pertenezca a *H* deberá verificar que:

$$|F_1P - F_2P| = 2a \Leftrightarrow F_1P - F_2P = \pm 2a$$

considerando la distancia entre dos puntos en el sistema de coordenadas planteado resulta:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

Trabajando algebraicamente y llamando: $c^2 - a^2 = b^2$, obtenemos:

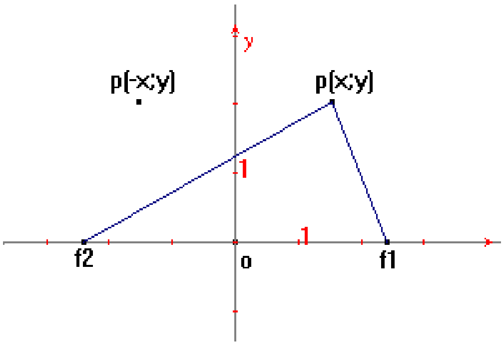
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Ecuación canónica de la hipérbola con focos en el eje de las abscisas

a. Simetrías de una Hipérbola

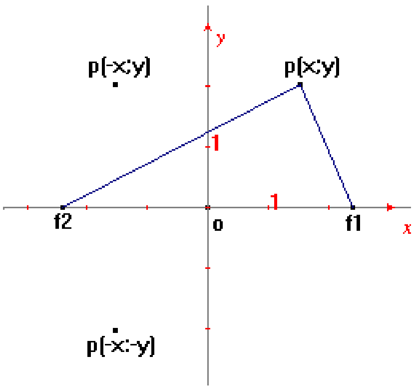
1. Simetría con respecto al eje y

$\forall P(x;y)\in H(F_1;F_2;a)\Rightarrow P'(-x;y)\in H(F_1;F_2;a)\Rightarrow$ que puntos cuyas abscisas son opuestas tienen la misma ordenada por lo tanto **la gráfica es simétrica respecto al eje y.**



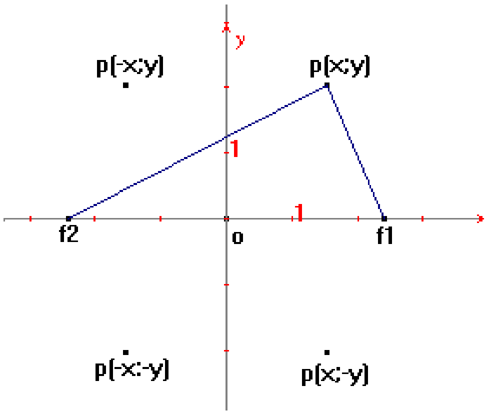
2. Simetría con respecto al origen

$\forall P(x;y)\in H(F_1;F_2;a)\Rightarrow P'(-x;-y)\in H(F_1;F_2;a)\Rightarrow$ que puntos cuyas abscisas son opuestas tienen ordenadas opuestas por lo tanto **la gráfica es simétrica respecto origen.**



3. Simetría con respecto al eje x

$\forall P(x;y) \in H(F_1;F_2;a) \Rightarrow P'(x;-y) \in H(F_1;F_2;a) \Rightarrow$ que puntos cuyas ordenadas son opuestas tienen abscisas iguales por lo tanto **la gráfica es simétrica respecto del eje x.**



b. Intersección con los ejes coordenados:

1. Intersección con el eje x

Para buscar los puntos donde la curva corta al eje x debemos buscar los puntos de ordenada cero o sea:

$$\left.\begin{array}{c} y=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow x^2=a^2 \Leftrightarrow x=\pm a$$

o sea los puntos $(a;0)$ y $(-a;0)$ pertenecen a la hipérbola, y se los denomina **vértices** de la hipérbola

2. Intersección con el eje y

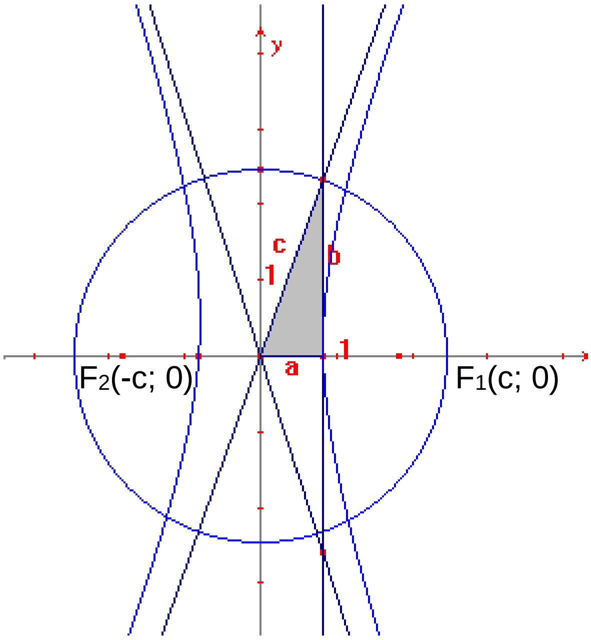
$$\left.\begin{array}{c} x=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y^2=-b^2 \Leftrightarrow \nexists y \in \Re$$

luego la hipérbola que estamos considerando, no interseca al eje y

c. Ejes de la hipérbola

- El segmento determinado por los puntos $(a;0)$ y $(-a;0)$, **vértices** de la hipérbola se denomina **eje transverso o real**
- El segmento determinado por los puntos $(b;0)$ y $(-b;0)$, se denomina **eje imaginario**

Para ubicar los puntos $(a;b)$ y $(a;-b)$ observemos la siguiente construcción:



La circunferencia trazada tiene radio igual a c. Si por el vértice (a; 0) trazamos una perpendicular al eje de las x en la intersección con dicha circunferencia encontramos un punto que con el centro de coordenadas y el vértice determina un triángulo rectángulo de cateto a e hipotenusa c. Como sabemos que $c^2 - a^2 = b^2$ podemos escribir: $c^2 = b^2 + a^2$ o sea que aplicando el teorema de Pitágoras vemos que el otro cateto del triángulo mide b.

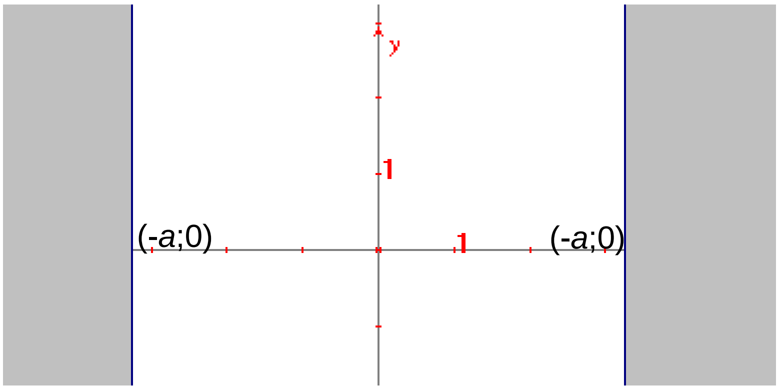
d. Ubicación de la curva

De acuerdo a lo visto en los puntos anteriores y despejando el valor de y en la ecuación canónica, podemos ubicar a la curva en el plano, o sea:

$$P(x;y) \in H(F_1;F_2;a) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

es decir, para que la raíz tenga solución en los reales o sea exista el correspondiente valor de y debe cumplirse que $|x| \geq a$.

La curva estará ubicada en los semiplanos que sombreamos a continuación:



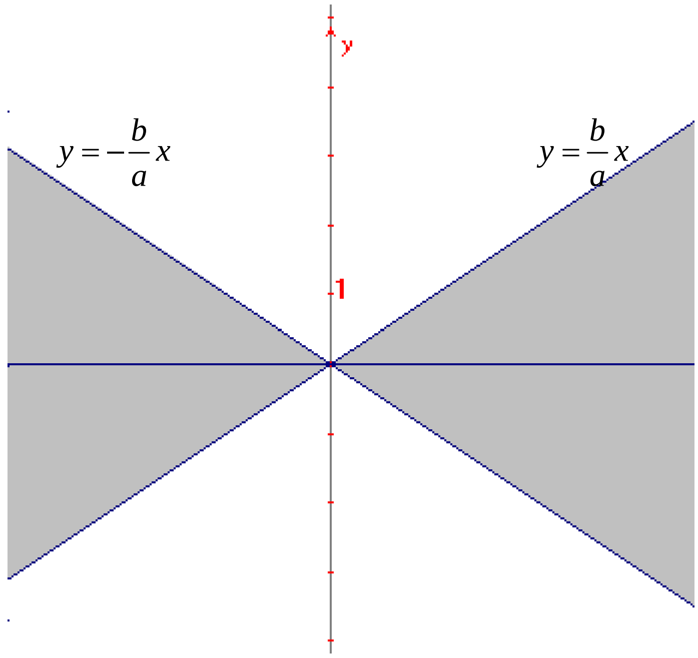
e. Excentricidad de la hipérbola

Otro dato importante en las cónicas es la excentricidad, ya definida en la elipse. La excentricidad es un número que resulta del cociente entre la semidistancia focal (c) y el semieje transverso (a)

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad \text{como } c > a \text{ resulta que } \varepsilon > 1$$

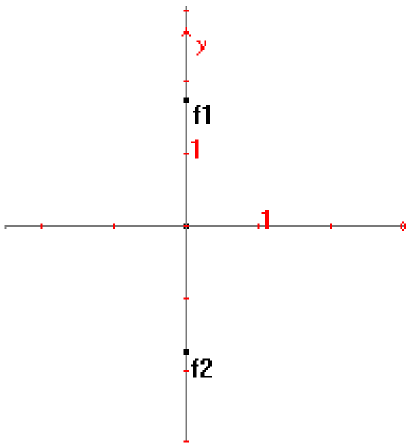
f. Asíntotas de la hipérbola

Se puede demostrar que las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola con eje focal el de las abscisas son : $y = \pm \frac{b}{a}$



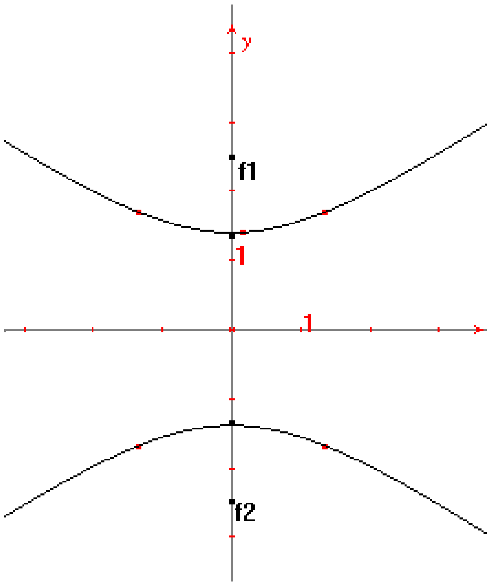
Ecuación cartesiana de la Hipérbola con centro en (0; 0) y focos en el eje de las ordenadas

Si iniciáramos nuevamente todo el estudio de la hipérbola pero colocando los focos equidistantes del origen de coordenadas, pero en el eje de las y,



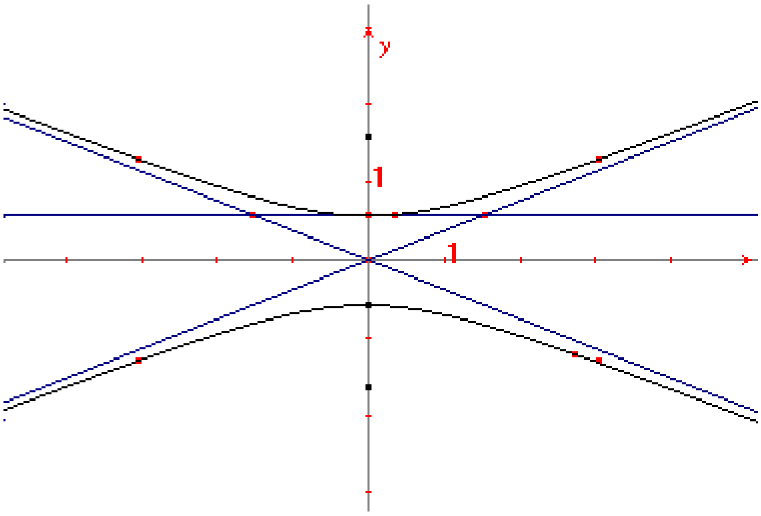
llegaríamos a la siguiente expresión

$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{a^2}}-\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{b^2}}=\mathbf{1}$$



Un análisis similar al realizado hasta aquí se podría repetir para esta hipérbola, llegando a las siguientes conclusiones:

- el **eje imaginario** es el eje de las ***x*** y el **eje transverso** el eje ***y*.**
- Los **vértices** en este caso son los puntos **(0; a)** y **(0; -a)**
- Las **asíntotas** serán las rectas $y=\pm\frac{a}{b}x$
- La relación que guardan a; b y c es $c^2-a^2=b^2$



Actividades

1) Halla la excentricidad, coordenadas de los vértices, focos y ecuaciones de las asíntotas y realiza la gráfica de la hipérbola de ecuación:

   a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$ b) $x^2-y^2=1$ c) $y^2-16x^2=1$

2) Halla la ecuación de la hipérbola con asíntotas $y=\frac{3}{5}x$ y focos $(2;0)$ y $(-2;0)$

3) Halla la ecuación de la hipérbola que contiene a los puntos: $P\left(5;\frac{4}{3}\right)$ y $Q\left(\sqrt{34};-\frac{5}{3}\right)$

4) Determina la ecuación de la hipérbola, que satisfaga las condiciones indicadas en cada caso:

   a) Focos $f\,(\pm 5;0)$ y vértices $V\,(\pm 3;0)$

   b) Vértices $V\,(\pm 3;0)$ y asíntotas de ecuación $y=\pm\frac{2}{3}x$

   c) Focos $f\,(0;\pm 5)$ y asíntotas $y=\pm\frac{1}{3}x$

5) Determina la ecuación de la hipérbola cuyo eje focal es el eje x , si se sabe que $P_1(-5;2)$ pertenece a la hipérbola y la recta $y=-\frac{3}{5}x$ es una de sus asíntotas.

6) Halla los puntos de intersección de la hipérbola de ecuación $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ con la recta $3x+2y=0$ .Resuélvelo gráfica y analíticamente.

7) Dada la hipérbola de ecuación $16x^2-9y^2=144$, halla sus semiejes; sus focos; su excentricidad; sus asíntotas y su gráfica.

8) Resuelva gráficamente el siguiente sistema $\begin{cases} 9x^2-4y^2=36 \\ y-x=0 \end{cases}$

Parábola

> ***Dados en el plano un punto fijo (F) y una recta (δ), llamamos parábola al conjunto de los puntos P del plano, cuyas distancias al punto fijo y a la recta son iguales.***

Acordemos algunos nombres:

- Al punto fijo lo denominamos **foco** (F)
- A la recta la llamamos **directriz** (δ)

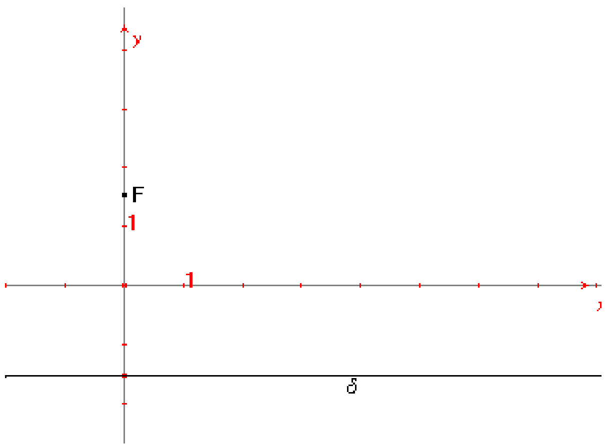
Escribiendo en símbolos el L.G., resulta:

$$\rho(F;\delta) = \{P / P \in \alpha; \delta \subset \alpha; F \in \alpha \wedge dist(F;P) = dist(P;\delta)\}$$

Ecuación cartesiana de la Parábola con vértice en (0; 0) y foco en el eje de las ordenadas

Para obtener la ecuación canónica de la parábola consideramos un sistema de coordenadas de tal modo que la directriz sea $\delta) y = -\frac{p}{2}$ y el foco sea $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$

Si p > 0, gráficamente resulta:



Teniendo en cuenta este sistema resulta que:

Si P(x; y) es un punto de la parábola se cumple:

$$dist(F;P) = \left|\overrightarrow{FP}\right| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = dist(\delta;P) = \left|y + \frac{p}{2}\right|$$

es decir

$$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|y+\frac{p}{2}\right|$$

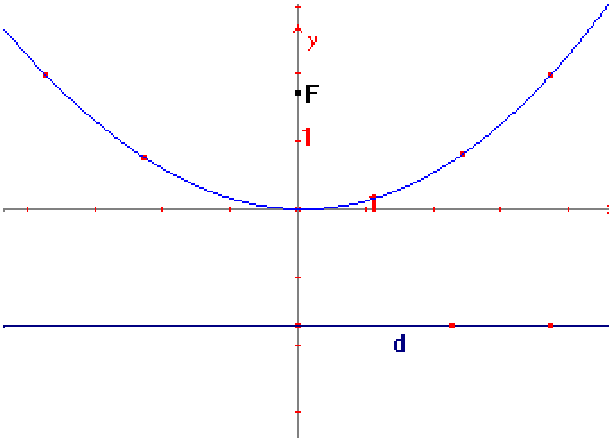
- elevando al cuadrado ambos miembros resulta

$$x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=\left(y+\frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2\frac{p}{2}y+\left(\frac{p}{2}\right)^2=y^2+2\frac{p}{2}y+\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

- simplificando, resulta:

$$\boxed{\mathbf{x^2=2py}}$$

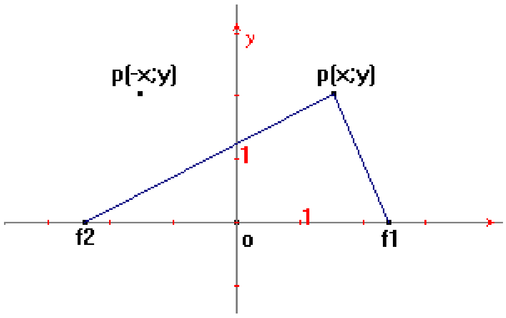
Ecuación canónica de la parábola con vértice en (0; 0) y foco en el eje de las ordenadas



a. Simetrías de una Parábola

1. Simetría con respecto al eje y

$\forall P(x;y)\in\rho(F;\delta)\Rightarrow P'(-x;y)\in\rho(F;\delta)\Rightarrow$ que puntos cuyas abscisas son opuestas tienen la misma ordenada por lo tanto **la gráfica es simétrica respecto al eje y.**



b. Intersección con los ejes coordenados:

1. Intersección con el eje x

Para buscar los puntos donde la curva corta al eje x debemos buscar los puntos de ordenada cero o sea:

$$\left.\begin{array}{r} y=0 \\ x^2=2py \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

o sea el punto $(0;0)$ pertenece a la parábola, y se lo denomina **vértice** de la parábola

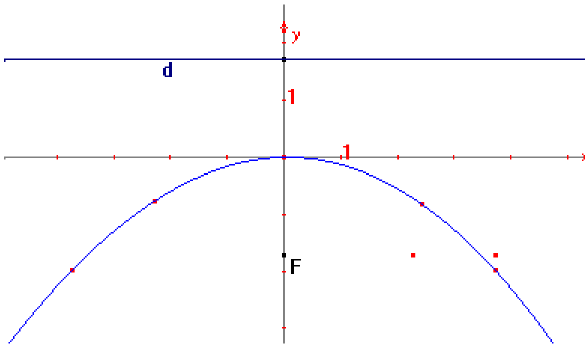
2. Intersección con el eje y

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ x^2=2py \end{array}\right\} \Rightarrow 2py=0 \Leftrightarrow y=0$$

es decir, la parábola interseca al eje y en (0; 0)

Observación:

Si consideramos p < 0, resulta:



Ecuación cartesiana de la Parábola con vértice en (0; 0) y foco en el eje de las abscisas

Si se hubiese tomado como foco el punto $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ y como directriz $\delta) x=-\frac{p}{2}$ la gráfica resulta una parábola de eje de simetría el eje *x* y su ecuación:

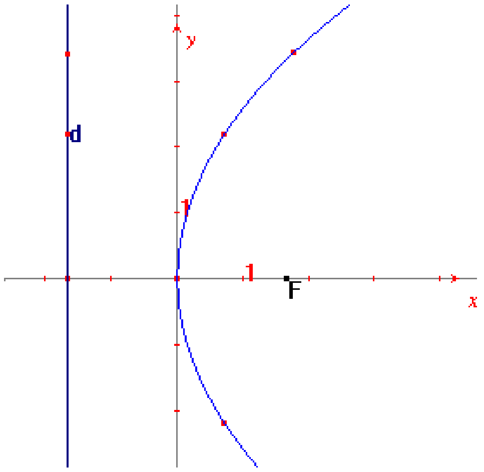
$$\boxed{\mathbf{y^2=2px}}$$

Ecuación canónica de la parábola con vértice en (0; 0) y foco en el eje de las abscisas

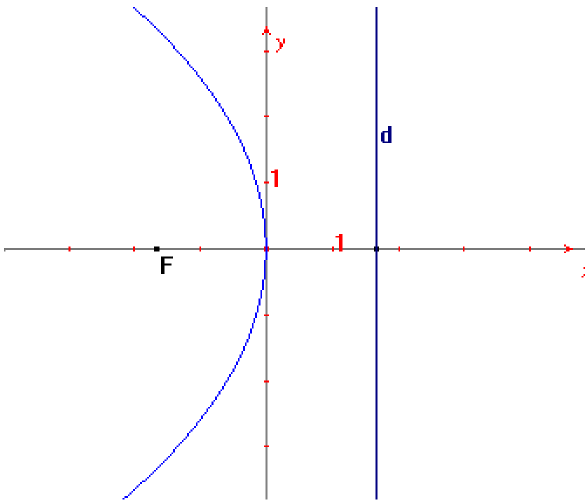
Observaciones:

En este caso la simetría se cumple respecto del eje *x*

Si $p > 0$

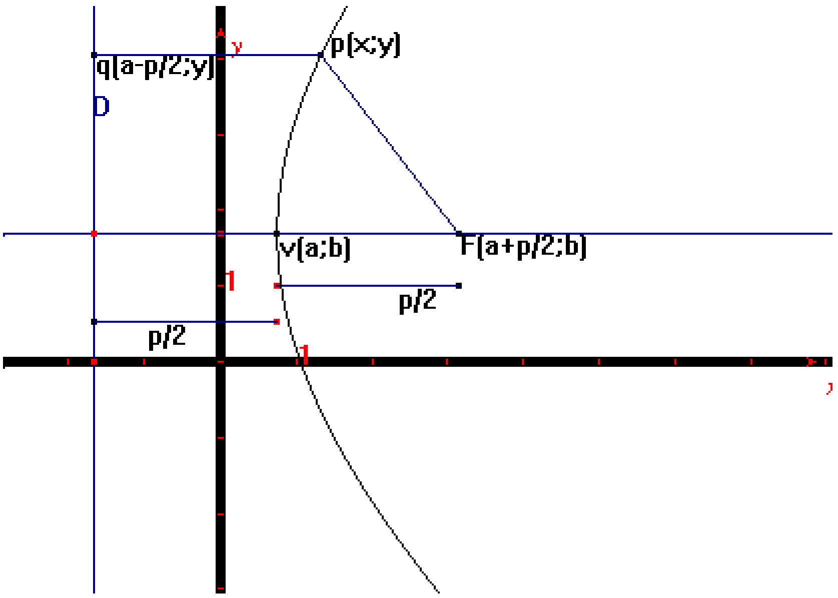


Si $p < 0$



Ecuación de una parábola cuyo vértice es un punto cualquiera del plano y su eje de simetría paralelo al eje de las abscisas

Consideremos una parábola cuyo eje de simetría sea una recta paralela, por ejemplo al eje *x* y su vértice un punto de dicho eje de coordenadas $V(a;b)$, de tal modo que el eje de simetría será la recta $y = b$. La gráfica resultará entonces:



Aplicando nuevamente el concepto de LG. Para la parábola, en esta situación resulta:

$$\text{dist}(F;P) = \text{dist}(P;\delta)$$

- que traduciéndolo a distancia en el sistema de coordenadas resulta:

$$x + \frac{p}{2} - a = \sqrt{\left[x - \left(a + \frac{p}{2}\right)\right]^2 + (y-b)^2}$$

- elevando al cuadrado a ambos miembros

$$\left(x + \frac{p}{2} - a\right)^2 = \left[x - \left(a + \frac{p}{2}\right)\right]^2 + (y-b)^2$$

- resolviendo y cancelando

$$-pa + px - 2xa = -2xa - px + pa + (y-b)^2$$

$$\boxed{(\mathbf{y} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{2p}(\mathbf{x} - \mathbf{a})}$$

⬇

Ecuación canónica de la parábola cuyo vértice es un punto cualquiera del plano y su eje de simetría paralelo al eje de las abscisas

Ecuación de una parábola cuyo vértice es un punto cualquiera del plano y su eje de simetría paralelo al eje de las ordenadas

Se puede demostrar efectuando un análisis similar al del apartado anterior que :

$$\boxed{(x-a)^2 = 2p(y-b)}$$

⬇

Ecuación canónica de la parábola cuyo vértice es un punto cualquiera del plano y su eje de simetría paralelo al eje de las ordenadas

Actividades

1. Halla las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de la parábola $y^2 = 8x$. Dibuja su gráfica.
2. Deduce la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F(4;\,0)$ y la ecuación de su directriz $x = 0$.
3. Determina gráfica y analíticamente los puntos de intersección de la curva de ecuación $y^2 = x$ y la recta de ecuación $y = x - 2$.

4. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo foco se encuentra en $(2;\ 4)$ y la ecuación de su directriz es $y = -2$

5. Encuentra la ecuación de la parábola con foco en el eje de las ordenadas y que pasa por los puntos $(-5;\ 4)$; $(2;\ -1)$ y $(-1;\ 3)$.

6. Dada la parábola $x^2 - 8x - 16y + 32 = 0$, halla las coordenadas del vértice y del foco.

7. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 2x$ en el punto de abscisa $\frac{9}{2}$ y ordenada positiva.

Respuestas a los problemas propuestos

CIRCUNFERENCIA.

1) a) $x^2 + y^2 - 16 = 0$ b) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$

c) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$ d) $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{89}{4}$

2) a) Es la ecuación de una circunferencia de centro (2; -2) y radio 4.
b) Es la ecuación de una circunferencia de centro (-1; 3/2) y radio 6.
c) No es la ecuación de una circunferencia.
d) Es la ecuación de una circunferencia de centro (-4; -3) y radio 5.
e) Es la ecuación de una circunferencia de centro (0; 3) y radio $\sqrt{8}$.
f) No es la ecuación de una circunferencia.
g) Es la ecuación de una circunferencia de centro (0; 0) y radio 5.
h) Es la ecuación de una circunferencia de centro (-1; 2) y radio 4/3.
i) No es la ecuación de una circunferencia.

3) a) $(x+4)^2 + (y+6)^2 = 61$

b) $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = \frac{65}{8}$. Su centro es $\left(\frac{1}{4}; \frac{13}{4}\right)$ y su radio $\sqrt{\frac{65}{8}} = \frac{\sqrt{130}}{4}$

4) $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ 5) $x^2 + (y+2)^2 = 10$

6) a) Los puntos (4; -1) y (4; -5) pertenecen a la circunferencia.
b) El punto (1; 0) no pertenece a la circunferencia.

7) a) Las ecuaciones son: $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$ y $(x+143)^2 + (y+15)^2 = 145^2$

b) Las ecuaciones son: $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$ y $(x+10)^2 + (y+10)^2 = 100$

c) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

8) Los sistemas están integrados por una circunferencia y una recta .

a) (-2;1) y (1;3) b) (0:0) y (-3;0) c) (-1;2) y (0;1) d) no existe solución

9) a) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x-2)^2+y^2=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x+2)^2+y^2=4 \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4} \\ y=\frac{4}{3}x \end{cases}$

ELIPSE

1) a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{81}=1$ c) $\frac{x^2}{29}+\frac{y^2}{4}=1$

2) a) a = 3; b = $\sqrt{5}$ b) Los focos son: (0; 2) y (0; -2) c) Excentricidad: $\frac{2}{3}$

3) a) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

b) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1$ y $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{3}=1$ c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ y $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

d) $\frac{4x^2}{81}+\frac{y^2}{18}=1$ y $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{81}=1$ e) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$

4) a) Es la ecuación de una elipse.
b) i) semieje mayor = 6
ii) intersección con el eje x: (4; 0) y (-4; 0)
intersección con el eje y: (0; 6) y (0; -6)

5) No existe una elipse que verifique las condiciones dadas.

6)Los puntos de intersección son: $\left(\frac{100-40\sqrt{73}}{89};\frac{128+20\sqrt{73}}{89}\right)$ y $\left(\frac{100+40\sqrt{73}}{89};\frac{128-20\sqrt{73}}{89}\right)$

7) $\begin{cases} \text{semieje mayor}: \frac{80}{\sqrt{91}} \\ \text{semieje menor}: 8 \\ \text{Focos}: \left(\frac{12}{5},0\right) y \left(-\frac{12}{5},0\right) \end{cases}$ y $\begin{cases} \text{semieje mayor}: 8 \\ \text{semieje menor}: \frac{\sqrt{1456}}{5} \\ \text{Focos}: \left(0,\frac{12}{5}\right) y \left(0;-\frac{12}{5}\right) \end{cases}$

8)a)Los puntos de intersección son: $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5};\frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$

b) No hay puntos de intersección.

9) a) (0; 0), (1; 0) y (0; 2) b) (2; 3) y (-3; 0) c) (2; 0)

10) $\begin{cases} \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1 \\ y=\frac{2\sqrt{5}}{5}x-4 \end{cases}$

11) La ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto $\left(1;\sqrt{27}\right)$ es $y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$. La ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto $\left(1;-\sqrt{27}\right)$ es $y=\sqrt{3}x-4\sqrt{3}$

HIPÉRBOLA

1) a) $\varepsilon=\frac{\sqrt{29}}{2}$; vértices: $(\pm 2;0)$; focos: $\left(\pm\sqrt{29};0\right)$; ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm\frac{5}{2}x$

b) $\varepsilon=\sqrt{2}$; vértices: $(\pm 1;0)$; focos: $\left(\pm\sqrt{2};0\right)$; ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm x$

c) $\varepsilon=\frac{\sqrt{17}}{4}$; vértices: $(0;\pm 1)$; focos: $\left(0;\pm\frac{\sqrt{17}}{4}\right)$; ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm 4x$

2) $\frac{17x^2}{50}-\frac{17y^2}{18}=1$

3) $\frac{x^2}{9}-y^2=1$. Con focos en el eje de las ordenadas no existe ninguna.

4) a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ c) $\frac{2y^2}{5}-\frac{2x^2}{45}=1$

5) $\frac{9x^2}{125}-\frac{y^2}{5}=1$ 6) Los puntos de intersección son: $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3};2\sqrt{3}\right)$ y $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};-2\sqrt{3}\right)$

7) a = 3; b = 4; vértices: $(\pm 3;0)$; focos: $(\pm 5;0)$; excentricidad: $\varepsilon=\frac{5}{3}$; asíntotas: $y=\pm\frac{4}{3}x$

8) No se presenta la resolución gráfica.

PARÁBOLA

1) Foco: (2; 0). Ecuación de la directriz: $x=-2$.

2) $y^2=8(x-2)$

3) Los puntos de intersección son: (4; 2) y (1; -1)

4) $(x-2)^2=12(y-1)$

5) $(x+1)^2=-2(y-2)$ y $(y+5)^2=-12\left(x-\frac{37}{12}\right)$

6) Vértice: (4; 1). Foco: (4; 5)

7) y= $\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}$