Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Proporcionalidad en los triángulos Thales

2º Año

Cód. 1204-15

Prof. Juan Carlos Bue
Prof. Daniela Candio
Prof. Noemí Lagreca
Prof. María del Luján Martínez
Dpto. de Matemática

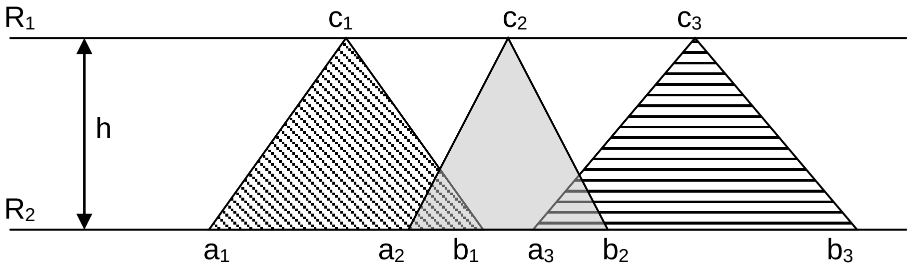
Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

LA PROPORCIONALIDAD EN LOS TRIÁNGULOS

CONSIDERACIONES GENERALES

Dadas dos rectas R_1 // R_2 y los triángulos que se observan en el siguiente gráfico, siendo h la medida de la altura de los mismos:



h es constante pues R_1 // R_2

Información: Convenimos en simbolizar con ab la medida del segmento ab

si calculamos las áres respectivas, resulta:

$$\left.\begin{aligned} A(\overset{\Delta}{a_1b_1c_1}) &= \frac{a_1b_1 \cdot h}{2} = a_1b_1 \cdot \frac{h}{2} \\ A(\overset{\Delta}{a_2b_2c_2}) &= \frac{a_2b_2 \cdot h}{2} = a_2b_2 \cdot \frac{h}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{A(\overset{\Delta}{a_1b_1c_1})}{A(\overset{\Delta}{a_2b_2c_2})} = \frac{a_1b_1 \cdot \frac{h}{2}}{a_2b_2 \cdot \frac{h}{2}} = \frac{a_1b_1}{a_2b_2}$$

De acuerdo a lo expuesto, resulta:

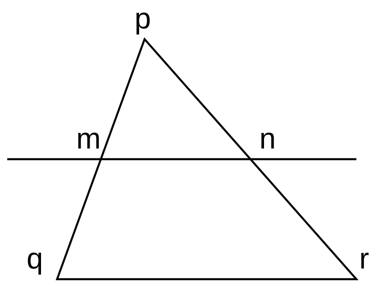
Las áreas de triángulos de igual altura son proporcionales a las medidas de las bases respectivas

TEOREMA

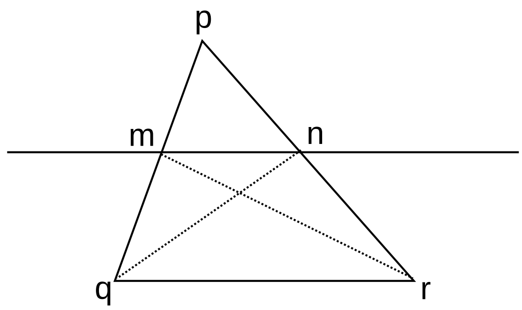
> Toda paralela a un lado de un triángulo determina sobre las rectas en las que están incluidos los otros dos lados, segmentos de medidas directamente proporcionales o simplemente segmentos proporcionales.

H) $\overleftrightarrow{mn} \parallel \overleftrightarrow{qr}$

T) $\dfrac{pm}{mq} = \dfrac{pn}{nr}$



D) $\overset{\Delta}{qmn}$ y $\overset{\Delta}{mnp}$ tienen igual altura (la distancia del vértice n a la recta $\overleftrightarrow{pq}$). Por la propiedad anterior resulta : $\dfrac{A(\overset{\Delta}{mnp})}{A(\overset{\Delta}{mnq})} = \dfrac{pm}{mq}$ (1)



Análogamente $\overset{\Delta}{mnp}$ y $\overset{\Delta}{mnr}$ tienen igual altura
(la distancia del vértice m a la recta $\overleftrightarrow{pr}$, por lo tanto:

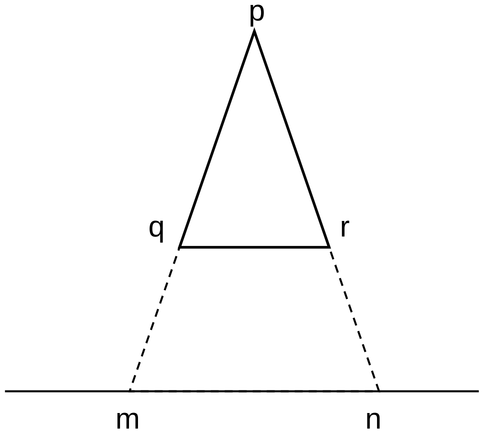
$$\frac{A(\overset{\Delta}{mnp})}{A(\overset{\Delta}{mnr})} = \frac{pn}{nr} \quad (2)$$

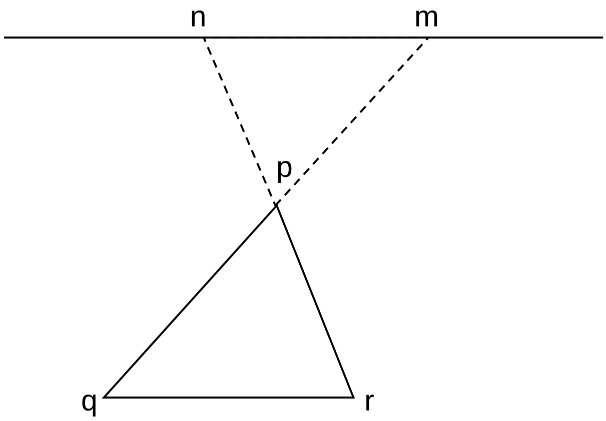
Además $\overset{\Delta}{mnq}$ y $\overset{\Delta}{mnr}$ tienen la misma base mn y la misma altura respecto de esa base, por lo que $A(\overset{\Delta}{mnq}) = A(\overset{\Delta}{mnr})$ (3)

De (1); (2) y (3) resulta:

$$\frac{A(\overset{\Delta}{mnp})}{A(\overset{\Delta}{mnq})} = \frac{A(\overset{\Delta}{mnp})}{A(\overset{\Delta}{mnr})} \Rightarrow \boxed{\frac{pm}{mq} = \frac{pn}{nr}}$$

Se puede demostrar que la propiedad también vale en los siguientes casos:





TEOREMA RECÍPROCO

> Si una recta interseca a dos lados de un triángulo o a sus prolongaciones y determina sobre ellos segmentos proporcionales, entonces es paralela al tercer lado.

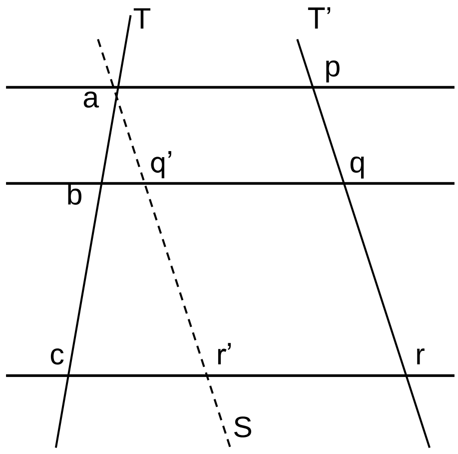
TEOREMA DE THALES

> Si tres o más paralelas son intersecadas por dos transversales, las medidas de los segmentos determinados en una de ellas son directamente proporcionales a las medidas de los segmentos determinados en la otra.

H) $\overleftrightarrow{ap} \ // \ \overleftrightarrow{bq} \ // \ \overleftrightarrow{cr}$, T y T´ transversales.

T) $\frac{ab}{bc} = \frac{pq}{qr}$

D) Trazamos por el punto “a” la recta S // T’



Llamamos q' y r' a los puntos de intersección de S con $\overleftrightarrow{bq}$ y $\overleftrightarrow{cr}$ respectivamente. En el $\overset{\Delta}{acr'}$ es $\overleftrightarrow{bq'}$ // $\overleftrightarrow{cr'}$. Por el teorema anterior resulta:

$$\frac{ab}{bc} = \frac{aq'}{q'r'} \quad \otimes$$

Pero aq'qp y q'r'rq son paralelogramos por construcción (poseen dos pares de lados opuestos paralelos). Por propiedad de los paralelogramos resulta: $\begin{cases} aq' = pq \\ q'r' = qr \end{cases}$

Reemplazando en $\otimes$: $\boxed{\dfrac{ab}{bc} = \dfrac{pq}{qr}}$

En particular, si ab = bc, entonces pq = qr (a segmentos congruentes en una de las transversales, corresponden segmentos congruentes en la otra).

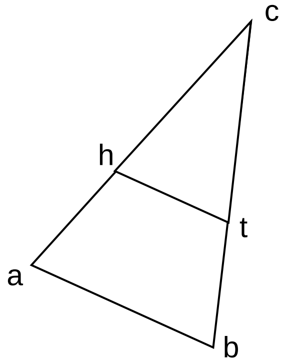
ACTIVIDADES

1) Sabiendo que $\overleftrightarrow{ht}$ // $\overleftrightarrow{ab}$ completa:

a) $\dfrac{ca}{ch} = \_\_\_$ **d)** $\dfrac{tb}{ct} = \_\_\_$

b) $\dfrac{ca}{ha} = \_\_\_$ **e)** $\dfrac{ct}{ch} = \_\_\_$

c) $\dfrac{ch}{ha} = \_\_\_$ **f)** $\dfrac{bt}{ah} = \_\_\_$

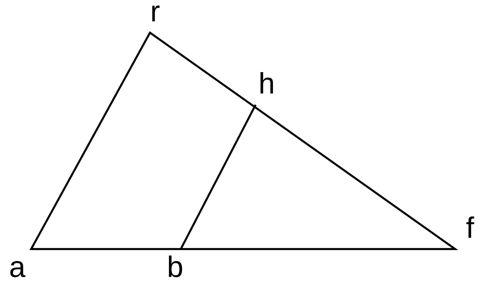


2) Si $\overleftrightarrow{bh} \,//\, \overleftrightarrow{ar}$ y la medida de los segmentos respecto a la misma unidad de medida, es la que se indica en cada apartado, calcula la medida del segmento que se solicita.

a) rh = 4 hf = 8
bf = 10 ab =

b) rh = 6 hf =10
ab = 3 af =

c) rh = 5 rf = 20
af = 18 bf =



3) Completa las siguientes igualdades

a) $\frac{a}{b} = \_\_\_\_\_\_$

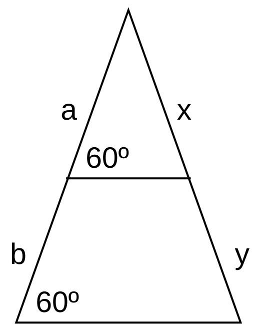
b) $\frac{a+b}{a} = \frac{\_\_\_\_\_\_}{x}$

c) $\frac{a+b}{x+y} = \frac{\_\_\_\_\_\_}{x}$

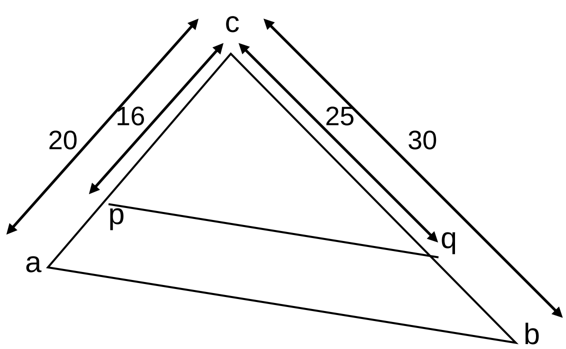
d) $\frac{a}{x} = \_\_\_\_\_\_$

e) $\frac{a+b}{b} = \frac{x+\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_}$

f) $\frac{x+y}{a+b} = \frac{y}{\_\_\_\_\_\_}$



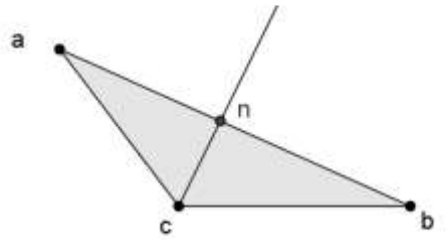
4) Si los segmentos de la figura poseen las medidas indicadas, respecto al cm, ¿es $\overleftrightarrow{pq} \,//\, \overleftrightarrow{ab}$? Justifica la respuesta.



PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO INTERIOR DE UN TRIÁNGULO

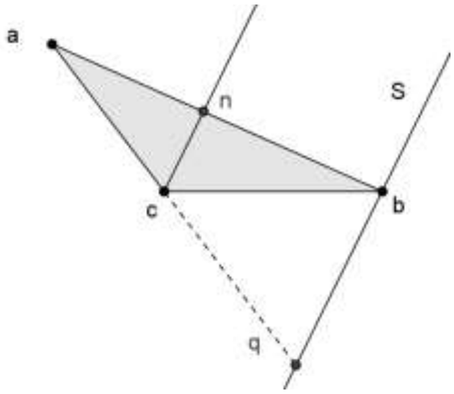
La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo determina sobre el lado opuesto segmentos cuyas longitudes son directamente proporcionales a los lados adyacentes a dicho ángulo.

H) $\overset{\Delta}{abc}$; $\overrightarrow{cn}$ bisectriz de $\hat{c}$



T) $\dfrac{an}{nb} = \dfrac{ac}{cb}$

D) Trazamos por b una recta S // $\overrightarrow{cn}$ .Se prolonga el segmento $\overline{ac}$ tal que $\overleftrightarrow{ac} \cap S = \{q\}$



Aplicando el teorema de una paralela a un lado de un triángulo resulta: $\dfrac{an}{nb} = \dfrac{ac}{cq}$ (1)

$a\hat{c}n = c\hat{q}b$ por correspondientes entre $\overleftrightarrow{cn} \,//\, S \nparallel \overleftrightarrow{aq}$ (2)

$b\hat{c}n = c\hat{b}q$ por alternos internos entre $\overleftrightarrow{cn} \,//\, S \nparallel \overleftrightarrow{cb}$ (3)

$a\hat{c}n = b\hat{c}n$ por $\overrightarrow{cn}$ bisectriz de $\hat{c}$ (4)

Resulta de (2), (3), y (4) por aplicación de la propiedad transitiva que:

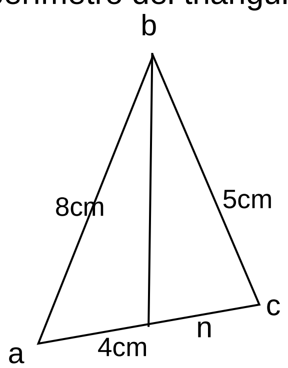
$$c\hat{q}b = c\hat{b}q \underbrace{\Rightarrow}_{(5)} \overline{cq} = \overline{cb} \quad (6)$$

(5) En todo triángulo a ángulos congruentes se le oponen lados congruentes

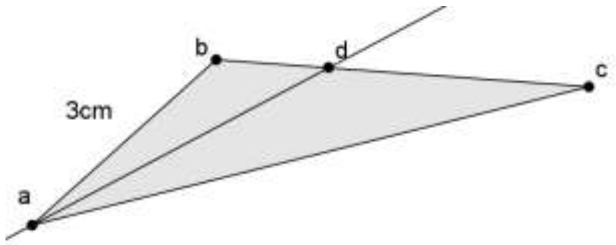
Reemplazando (6) en (1) $\dfrac{an}{nb} = \dfrac{ac}{cb}$

ACTIVIDADES

5) Si $\overrightarrow{bn}$ biseca a $\hat{b}$ y los lados poseen las medidas indicadas en la figura, respecto al centímetro, halla el perímetro del triángulo abc

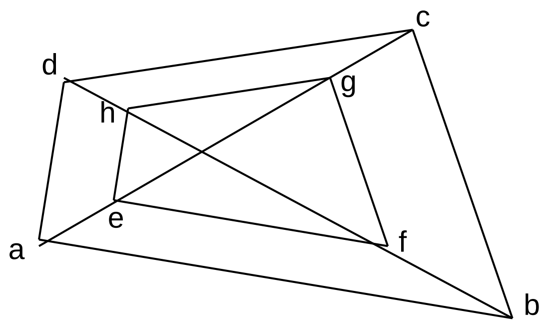


6) Calcula la longitud del $\overline{ac}$ respecto al centímetro, dado que $\overrightarrow{ad}$ biseca al ángulo $b\hat{a}c$ y bd = 2 dc.



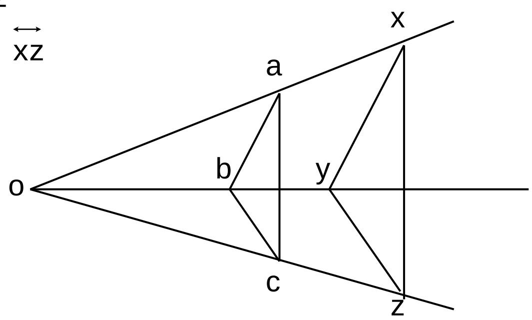
7) En la figura es: $\overleftrightarrow{ef} \parallel \overleftrightarrow{ab}$; $\overleftrightarrow{fg} \parallel \overleftrightarrow{bc}$ y $\overleftrightarrow{gh} \parallel \overleftrightarrow{dc}$

Prueba que $\overleftrightarrow{he} \parallel \overleftrightarrow{da}$



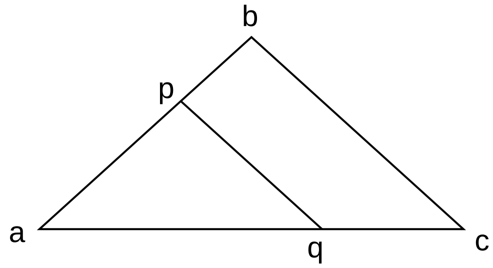
8) Se dan dos triángulos $\overset{\Delta}{abc}$ y $\overset{\Delta}{xyz}$ tales que $\overleftrightarrow{xa}$; $\overleftrightarrow{yb}$ y $\overleftrightarrow{zc}$ se intersecan en o y $\overleftrightarrow{ab} \parallel \overleftrightarrow{yx}$; $\overleftrightarrow{bc} \parallel \overleftrightarrow{yz}$

Prueba que $\overleftrightarrow{ac} \parallel \overleftrightarrow{xz}$

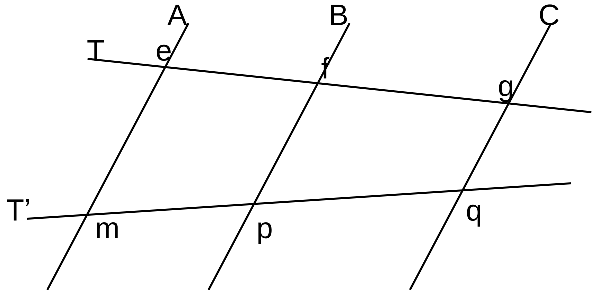


9)

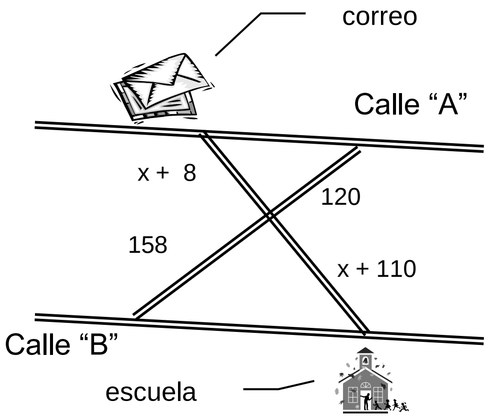
Si ap = 2x + 4; pb = x + 2; aq = 3x + 1; qc = x + 3 y ac = 24 (las medidas se dan con respecto al cm) ¿es $\overleftrightarrow{pq} \parallel \overleftrightarrow{bc}$? Justifica tu respuesta.



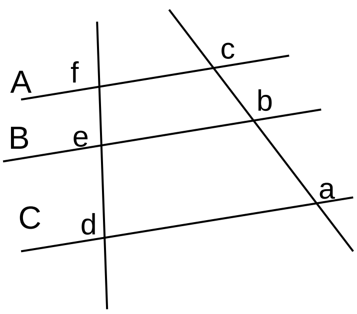
10) Si A // B // C, T y T' transversales y ef = 4,4 , fg = 7,7 y mq = 11 respecto al cm, calcula la medida de los $\overline{mp}$ y $\overline{pq}$ respecto al cm.



11) ¿A qué distancia se encuentran entre sí, el correo y la escuela? (Las calles A y B son paralelas).La unidad de medida utilizada es el metro



12) Encuentra la longitud de $\overline{ac}$ **(**Utiliza valores exactos para efectuar los cálculos)



$fe = \left(\sqrt{5} - 1\right)cm$

$ed = \sqrt{20}\ cm$

$cb = x\ cm$

$ab = \left(\sqrt{5} + 1\right)cm$

Respuestas:

1) a) $\frac{cb}{ct}$ **b)** $\frac{cb}{tb}$ **c)** $\frac{ct}{tb}$ **d)** $\frac{ah}{hc}$ **e)** $\frac{cb}{ca}$ **f)** $\frac{ct}{ch}$

2) a) ab = 5 **b)** af = 8 **c)** bf =13,5

3) a) $\frac{x}{y}$ **b)** $\frac{x+y}{x}$ **c)** $\frac{a}{x}$ **d)** $\frac{b}{y}$ **e)** $\frac{x+y}{y}$ **f)** $\frac{y}{b}$

4) $\overleftrightarrow{pq}$ no es paralela a $\overleftrightarrow{ab}$

5) Perímetro = 19,5 cm

6) ac = 6cm

7) y 8) A CARGO DEL ALUMNO

9) $\overleftrightarrow{pq} // \overleftrightarrow{bc}$

10) pq = 7cm; mp = 4cm

11) Distancia del correo a la escuela: 746,21 m

12) $ac = \left(\frac{7}{5}\sqrt{5}+1\right)cm$