

Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Relaciones Métricas

1º Año

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS

Cód. 1104-16



Dpto. de Matemática





1. SISTEMA DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Problemas de Revisión

- 1) Calcula el valor de $\hat{\alpha}$, expresado en grados, minutos y segundos:
 - a) $\hat{\alpha} = 2^{\circ},8 + 17^{\circ}35'$
 - b) $\frac{5\hat{\alpha} + 8^{\circ}3'}{2} = 25^{\circ},4$
 - c) $\frac{1}{3}\hat{\alpha} + 150^{\circ}20' = 178^{\circ}$

- 2) a) Realiza el gráfico que corresponda a la siguiente descripción:
 d interior al $\hat{a}cb$ que es recto,
 $e \notin \hat{a}cb$
 $\hat{d}cb = \hat{e}cb$, $\hat{d}ce = 1\text{Recto}$
b) Calcula la medida de \hat{acd} y \hat{ace}

- 3) La suma entre el triple de la medida de un ángulo y la medida del suplemento del mismo es 210° . Calcula la medida del mismo.

- 4) Calcula la medida de los ángulos complementarios, sabiendo que uno de ellos es la mitad del otro.

- 5) Obtiene la medida de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, teniendo en cuenta que son complementarios y que la medida de $\hat{\alpha}$ es igual a la cuarta parte de la medida de $\hat{\beta}$.

- 6) Si $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 72^{\circ}33'$ y el complemento de $\hat{\alpha}$ es $\hat{\omega} = 57^{\circ}44'42''$, calcula $\hat{\beta}$

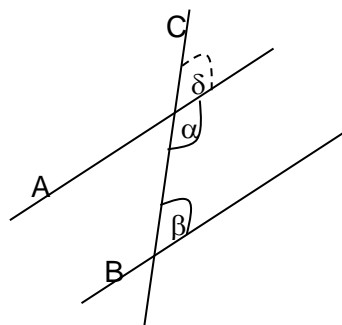
- 7) Si el ángulo $\hat{\alpha}$ mide $24^{\circ}10'$, calcula el triple de $\hat{\beta}$ siendo $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\hat{\alpha} + 30^{\circ}10'$.

2. PROPIEDAD DE LOS ÁNGULOS CONJUGADOS

“Los ángulos conjugados internos (externos) determinados por dos rectas paralelas cortadas por una tercera son suplementarios”.

Datos o hipótesis: H) $A \parallel B$ y C transversal

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son conjugados internos



Para realizar la demostración partimos de ciertos datos o información (**HIPÓTESIS**) que se consideran verdaderos y llegamos a un resultado o conclusión (**TESIS**) mediante el razonamiento (**DEMOSTRACIÓN**)

Tesis: T) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 2R$

Demostración: D)

Consideramos un ángulo auxiliar $\hat{\delta}$ adyacente al ángulo $\hat{\alpha}$

Completa :

AFIRMACIONES

JUSTIFICACIONES

(1) $\hat{\alpha} + \hat{\delta} = \dots\dots\dots$

pues.....

(2) $\hat{\delta} = \dots\dots\dots$

pues sonentre $A \parallel B \setminus C$

$\hat{\alpha} + \dots\dots = \dots\dots\dots$

sustituimos en (1) por (2)

Con lo que queda demostrada la propiedad para ángulos conjugados internos.

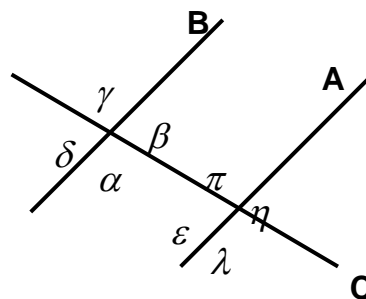
Te proponemos que realices la demostración para los ángulos conjugados externos



ACTIVIDADES

- Si $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos conjugados internos entre rectas paralelas intersecadas por una tercera y $\hat{\alpha} = \frac{2}{3}\hat{\beta}$. Calcula la medida de los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.
- Los ángulos $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\omega}$ son conjugados externos entre paralelas y la medida de $\hat{\varepsilon}$ es la cuarta parte de la medida de $\hat{\omega}$. Calcula $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\omega}$.
- Siendo $A \parallel B \not\parallel C$, para cada apartado, calcula la medida de los ángulos indicados en la figura.

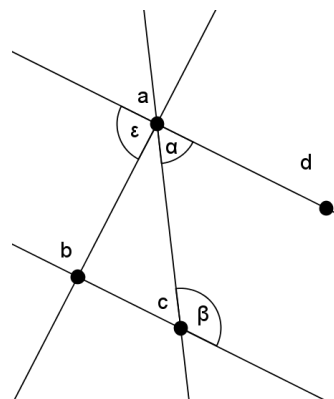
- $\hat{\pi} = 110^\circ 25'$
- $\hat{\gamma} = 3 \hat{\eta}$
- $\hat{\varepsilon} = \frac{1}{6} \hat{\pi}$
- $\hat{\varepsilon} = 3x$ y $\hat{\gamma} = 12x$



- Siendo $\overleftrightarrow{ad} \parallel \overleftrightarrow{bc}$:

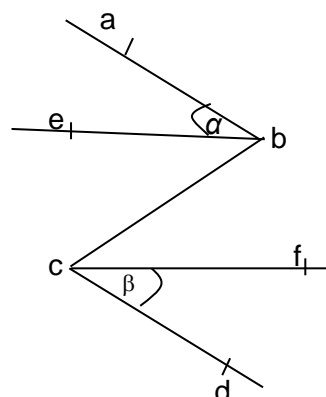
Calcula en cada apartado, según los datos, la medida de los ángulos interiores del $\triangle abc$

- $\hat{\alpha} = 29^\circ 35' 18''$ y \overrightarrow{ac} bisectriz de \widehat{bad}
- $\hat{\alpha} = 2x + 30^\circ$; $\hat{\beta} = 6x$ y $\hat{\varepsilon} = 5x$



- Sabiendo que $\overleftrightarrow{ab} \perp \overleftrightarrow{bc}$ y $\overleftrightarrow{bc} \perp \overleftrightarrow{cd}$ y $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$
Demostrar que:

- $\overleftrightarrow{ab} \parallel \overleftrightarrow{cd}$
- $\overleftrightarrow{be} \parallel \overleftrightarrow{cf}$

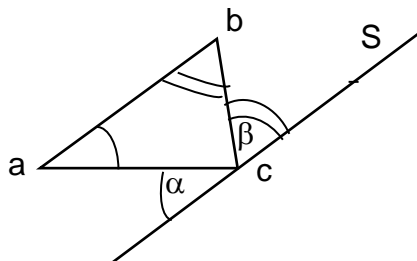


3. SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO

TEOREMA:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es un llano, o sea $2R$

Datos o hipótesis: H) $\triangle abc$
 Conclusión o tesis: T) $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 2R$
 Demostración: D)



Consideramos una recta S paralela al lado opuesto \overline{ab} que pase por un vértice c .
 Quedan determinados dos ángulos consecutivos al \hat{c} que llamaremos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

Completa para obtener la demostración

AFIRMACIONES

JUSTIFICACIONES

(1) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{c} = \dots\dots\dots$

pues.....

$\hat{\alpha} = \hat{a}$

son.....

$\hat{\beta} = \dots\dots\dots$

son alternos internos entre $\overleftrightarrow{ab} // S \wedge \overleftrightarrow{bc}$

$\hat{a} + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

sustituimos en (1) $\hat{\alpha}$ por \hat{a} y $\hat{\beta}$ por \hat{b}

con lo que queda demostrado el teorema.

Observación: como habrás notado, la demostración de este teorema supone la aceptación del quinto postulado de Euclides: *por un punto exterior a una recta pasa una y solo una paralela a dicha recta*

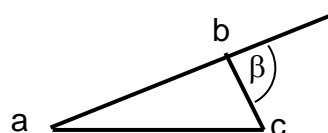


4. TEOREMA DEL ANGULO EXTERIOR DE UN TRIÁNGULO

Todo ángulo exterior de un triángulo es congruente con la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes y mayor que cualquiera de ellos

H) \hat{a} \hat{b} \hat{c} y $\hat{\beta}$ ángulo exterior de \hat{b}

T) $\hat{\beta} = \hat{a} + \hat{c}$; $\hat{\beta} > \hat{a}$; $\hat{\beta} > \hat{c}$



Demostración:

(1) $\hat{\beta} + \hat{b} = 2R$ porque

(2) $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 2R$ porque

Igualando las expresiones (1) y (2) resulta

$$\hat{\beta} + \hat{b} = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$$

Observamos que a ambos miembros está sumando el mismo ángulo por lo tanto

$$\hat{\beta} = \hat{a} + \hat{c}$$

Además el resultado de una suma es mayor que cada sumando por lo tanto

$$\hat{\beta} > \hat{a} \quad \text{y} \quad \hat{\beta} > \hat{c}$$

5. CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Contesta las siguientes propuestas justificando tu respuesta:

En el triángulo \hat{a} \hat{b} \hat{c}

▪ ¿qué clase de ángulos serán \hat{b} y \hat{c} si \hat{a} es recto u obtuso?

.....

▪ si \hat{a} es recto ¿qué puedes decir de \hat{b} y \hat{c} ?

.....

La respuesta a estas cuestiones constituye la demostración de los corolarios del teorema que a continuación enunciamos.

Sólo un ángulo de un triángulo puede ser recto u obtuso

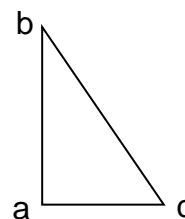
Si un ángulo de un triángulo es recto, los otros dos son complementarios

5.1 Según sus ángulos

Estas propiedades permiten efectuar una clasificación de los triángulos atendiendo a sus ángulos.

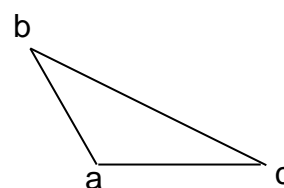
Podemos definir:

Todo triángulo con un ángulo recto se denomina **rectángulo**



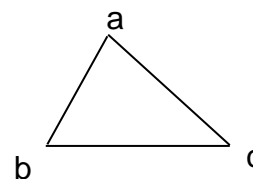
A los lados del ángulo recto se los denomina **catetos**, al lado opuesto al ángulo recto, **hipotenusa**

Triángulo **obtusángulo** es el que posee un ángulo obtuso



Resulta, de acuerdo con uno de los corolarios anteriores que el triángulo obtusángulo posee dos ángulos agudos.

Triángulo **acutángulo** es el que posee los tres ángulos agudos





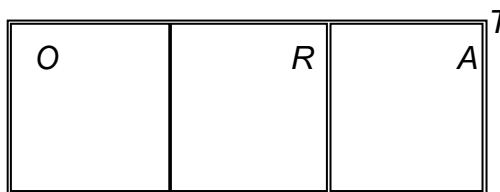
En base a estas definiciones, en el conjunto de los triángulos pueden distinguirse los siguientes subconjuntos no vacíos.

$$T = \{ \text{triángulos} \}$$

$$O = \{ \text{triángulos obtusángulos} \}$$

$$R = \{ \text{triángulos rectángulos} \}$$

$$A = \{ \text{triángulos acutángulos} \}$$



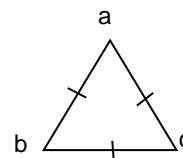
Observa que:

$$\left. \begin{array}{l} O \cap R = \emptyset \\ R \cap A = \emptyset \\ O \cap A = \emptyset \\ O \cup R \cup A = T \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{O, R \text{ y } A \text{ determinan una partición de } T \text{ en 3 subconjuntos}}$$

5.2 Según sus lados

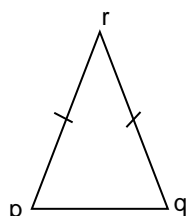
Teniendo en cuenta la clasificación de los triángulos según sus lados:

Todo triángulo que posee sus tres lados congruentes se denomina **equilátero**



$$\overline{ab} = \overline{ac} = \overline{bc}$$

Todo triángulo que posee al menos dos de sus lados congruentes se denomina **isósceles**

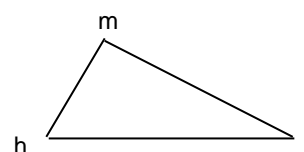


$$\overline{rp} = \overline{rq}$$

El lado \overline{pq} es **base**

En un triángulo isósceles al lado desigual se lo llama **base**

Todo triángulo que no posee ningún par de lados congruentes se denomina **escaleno**



Simbolizamos a los conjuntos:

$$I = \{ \text{triángulos isósceles} \}$$

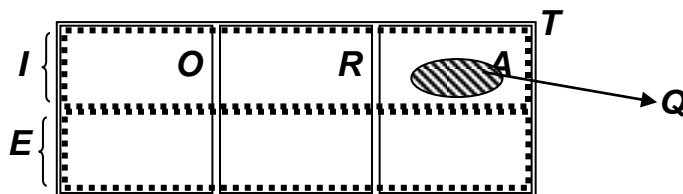
$$E = \{ \text{triángulos escalenos} \}$$

$$Q = \{ \text{triángulos equiláteros} \}$$

De la definición, es inmediato que:

$$Q \subset I \quad I \cap E = \emptyset \quad \wedge \quad I \cup E = T$$

En un mismo diagrama se muestra la partición de T (según sus ángulos) en 3 subconjuntos, en forma vertical, y su partición en 2 subconjuntos (según sus lados), en forma horizontal; ubicando el conjunto de los triángulos equiláteros incluido en $A \cap I$



⇒ Justifica por qué $Q \subset (A \cap I)$

⇒ En el diagrama de clasificación de los triángulos, marca como se te indica, dónde se encuentra un triángulo con las características siguientes:

- Rectángulo isósceles, con un \circ
- Rectángulo escaleno, con un \textcircled{R}
- Obtusángulo isósceles, con un \otimes
- Obtusángulo escaleno, con un \emptyset
- Isósceles equiángulo, con un $*$



ACTIVIDADES

1) Indica las características geométricas de los triángulos pertenecientes a cada uno de los siguientes conjuntos:

- a) $O \cap I$ c) $I \cap A$ e) $R \cap E$
 b) $R \cap I$ d) $E \cap A$ f) $Q \cap A$

2) Establece la falsedad o veracidad de cada una de las siguientes expresiones, justificando tu respuesta

- a) $\triangle abc$ equilátero $\Rightarrow \triangle abc$ isósceles
 b) $\triangle abc$ isósceles $\Rightarrow \triangle abc$ equilátero
 c) $\triangle abc$ rectángulo e isósceles $\Rightarrow \triangle abc$ equilátero

6. PROPIEDAD DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES:

La bisectriz del ángulo opuesto a la base del triángulo isósceles está incluida en la mediatriz de la base.

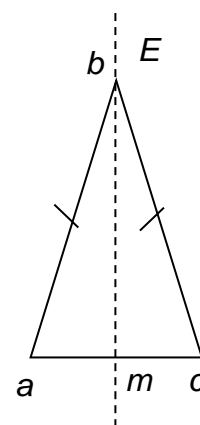
Sea $\triangle abc$ un triángulo en el cual $\overline{ab} = \overline{bc}$, o sea isósceles y consideremos la S_E tal que el eje E incluya a la bisectriz del $\hat{a}bc$

Entonces

$$\left. \begin{array}{l} s_E(\overrightarrow{ba}) = \overrightarrow{bc} \\ \overline{ba} = \overline{bc} \end{array} \right\} \Rightarrow s_E(a) \stackrel{(1)}{=} c \Rightarrow s_E(c) \stackrel{(1)}{=} a \quad (*)$$

(1) por P_5

Si $S_E(a) = c$ entonces E es la mediatriz de \overline{ac}



Si llamamos con m al punto de intersección de la base con la bisectriz del ángulo opuesto a la misma, lo anterior lo podemos simbolizar así:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{ab} = \overline{bc} \\ m \in \overline{ac} \\ \vec{bm} \text{ bisectriz de } \hat{abc} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{bm} \perp \overline{ac} \text{ y } \overline{am} = \overline{mc}$$

además

| SE | |
|-------------|--|
| b | b por pertenecer al eje |
| a | c por (*) |
| c | a por (*) |
| \hat{bac} | $\hat{bca} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \hat{bac} = \hat{bca} \text{ (**)}$ |

(3) por definición de congruencia

por la conclusión (**) podemos afirmar que

Los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles son congruentes

Se puede justificar también que:

Es suficiente que un triángulo posea dos ángulos congruentes para asegurar que es isósceles

Las dos últimas propiedades pueden reunirse estableciendo que:

En todo triángulo a ángulos congruentes se le oponen lados congruentes y recíprocamente

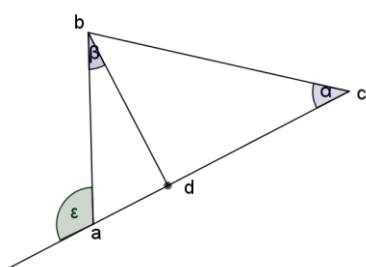
⇒ Demuestra que todo triángulo equilátero es equiángulo



ACTIVIDADES

En lo sucesivo, encontrarás problemas cuyo enunciado se individualiza con el símbolo (*). Esto significa que es una propiedad muy importante en la resolución de futuros problemas

- 1) Dado \overline{ab} , construye un triángulo isósceles de base \overline{ab} ¿Es único?
- 2) Calcula la medida de los ángulos de cualquier triángulo rectángulo isósceles.
- 3) (*) Demuestra que si los ángulos conjugados internos (externos) entre 2 rectas coplanarias intersecadas por una tercera son suplementarios, dichas rectas son paralelas.
- 4) Demuestra que las bisectrices de los ángulos conjugados internos entre paralelas son perpendiculares.
- 5)



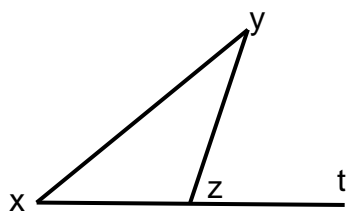
En la figura \hat{bdc} es rectángulo en \hat{d} ,

$$\hat{\alpha} = 40^\circ \text{ y } \hat{\beta} = 26^\circ$$

Halla la medida de $\hat{\epsilon}$, \hat{bac} y \hat{abc} .

Justifica los pasos que realiza

6)

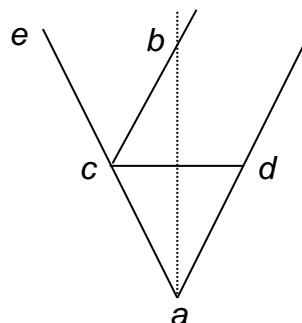


Si z punto medio de \overline{xt} y $\overline{zt} = \overline{zy}$

demuestra que $\hat{x} = \frac{1}{2} \hat{yzt}$

7)

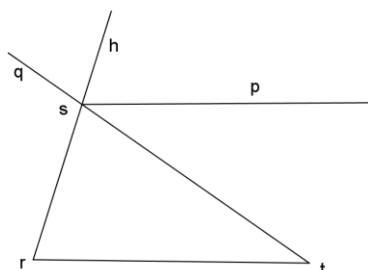
En la figura es \overrightarrow{ab} bisectriz de $\hat{c}ad$, \overrightarrow{cb} bisectriz de $\hat{e}cd$; $\hat{cad} = 32^\circ$ y $\hat{cda} = 51^\circ$
Calcula la medida de \hat{bcd}



Relaciones Métricas

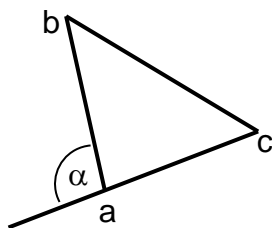
Matemática

- 8) Calcula la medida de los ángulos interiores del $\triangle rst$, sabiendo que $\overleftrightarrow{rt} \parallel \overleftrightarrow{sp}$, $\hat{qsh} = 81^\circ$ y $\hat{pst} = 34^\circ$. Justifica el procedimiento que realizas



- 9) Si $\triangle abc$ es isósceles con $\overline{ab} = \overline{bc}$ y $\hat{b} = 68^\circ 20' 12''$
- calcula la medidas de \hat{a} y \hat{c} .
 - determina la medida del ángulo exterior correspondiente al \hat{c}
- 10) En un triángulo mnp es $m = \frac{2}{3}p$ y $\hat{p} = \hat{n}$. Determina las medidas de cada uno de los ángulos del triángulo.

11)



Sabiendo que $\hat{b} = \hat{c}$ y $\hat{\alpha} = 102^\circ,6$; calcula cada uno de los ángulos del triángulo.

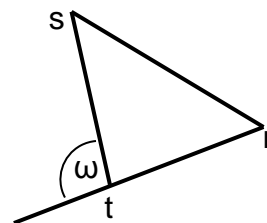
- 12) En un triángulo, un ángulo interior es de $35^\circ 40'$ y un ángulo exterior no adyacente a él es de $150^\circ 10'$. Determina la medida de los otros dos ángulos interiores.

- 13) Calcula la medida de los ángulos interiores del triángulo rst y del ángulo exterior $\hat{\omega}$ ubicados según muestra el gráfico, para cada caso:

a) $\hat{r} = 2x + 14^\circ$ $\hat{s} = 5x - 3^\circ$ $\hat{t} = 6x + 13^\circ$

b) $\hat{\omega} = 3x + 46^\circ$ $\hat{t} = 6x - 28^\circ$ $\hat{r} = \hat{s}$

c) $\hat{\omega} = 145^\circ$ $\hat{r} = 2x$ $\hat{s} = 2\hat{r}$

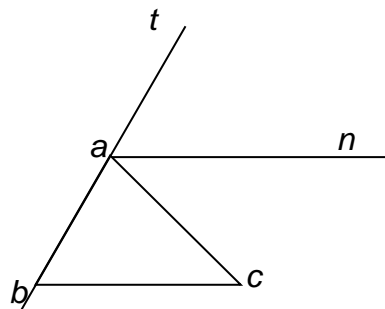




14) En un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos es el cuádruplo del otro. ¿Cuál es la medida de cada uno de ellos?

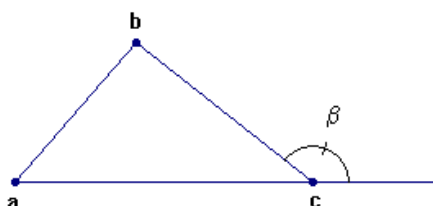
15) (*) Demuestra que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°

16) Si $\vec{an} \parallel \vec{bc}$ y \vec{an} biseca a $\hat{t}ac$
demuestra que $\triangle abc$ es isósceles



17) Si el ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles es de 114° , calcula los ángulos de la base.

18) Si $\hat{bac} = 48^\circ 22' 32''$; $\hat{abc} = 3\hat{bac} - 90^\circ 35'$. Calcula: \hat{abc} ; $\hat{\beta}$ y \hat{bca} .

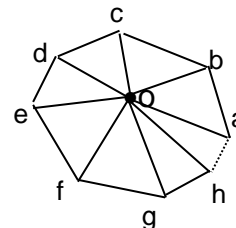


7. ÁNGULOS INTERIORES Y EXTERIORES DE UN POLÍGONO CONVEXO

7.1 Suma de los ángulos interiores de un polígono

- ⇒ Dibuja un cuadrilátero, un pentágono, un hexágono y un octógono, toma en cada uno de ellos un punto interior y únelo con segmentos a sus vértices ¿Cuántos triángulos quedan determinados?.....
¿Qué regularidad descubres?.....
.....

Consideremos un polígono convexo cualquiera de n lados, se observa que al trazar todos los segmentos desde un punto interior del mismo, queda descompuesto en n triángulos.



La suma de los ángulos interiores de dichos triángulos será $2R n$.
Entonces la suma de los ángulos interiores del Polígono de n lados, que simbolizamos con S_n resulta:

$$S_n = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} + \dots = 2Rn - 4R \quad (4R \text{ es la suma de los ángulos de vértice } o)$$

Expresando $4R = 2 \cdot 2R$

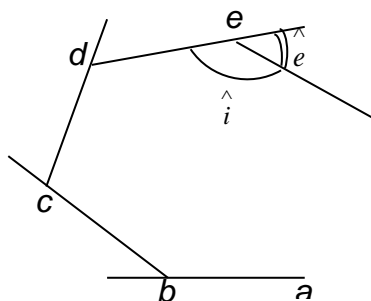
$$S_n = 2Rn - 2 \cdot 2R = 2R \cdot (n - 2) \quad (\text{Por Propiedad distributiva})$$

$$S_n = 2R \cdot (n - 2)$$

7.2 Suma de los ángulos exteriores de un polígono

La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es de $4R$

⇒ Completando estas proposiciones demostrarás esta propiedad



En cada vértice un ángulo interior (\hat{i}) y su exterior correspondiente (\hat{e}) suman
o sea $\hat{i} + \hat{e} = \dots \dots \dots (*)$

En un polígono de n lados, hay vértices, en cada vértice existe un ángulo

interior y uno exterior que verifican (*) por lo cual la suma de todos los ángulos interiores (S_n) y la de todos los exteriores (S_e) es....., o sea



$$S_n + S_e = 2 R \cdot n \quad (1)$$

y como se sabe que $S_n = 2 R \cdot n - 4R$ reemplazando en (1)

$$\text{resulta : } 2R \cdot n - 4R + S_e = 2Rn \Rightarrow S_e = 2R n - 2R n + 4R$$

$$\text{o sea : } S_e = 4R$$

ACTIVIDADES

1) En un cuadrilátero abcd es $\hat{a} = 2\hat{b}$, $\hat{c} = \hat{d} = 3\hat{b}$. Determina la medida de cada uno de los ángulos del cuadrilátero. (Sugerencia : plantea la ecuación en función del \hat{b})

2) En un hexágono tres de sus ángulos interiores suma $427^\circ 49' 15''$. Los otros tres ángulos son congruentes. ¿Cuál es la medida de cada uno de esos ángulos?

3) ¿En qué polígono la suma de sus ángulos interiores es de 1080° ?

4) Completa la siguiente tabla

| n | S_n |
|-------|--------------|
| 3 | |
| 13 | |
| | 1800° |
| | 2340° |
| | 3240° |
| | 30 R |

5) Determina la medida de un ángulo interior de

a) un pentágono regular

b) un heptágono regular

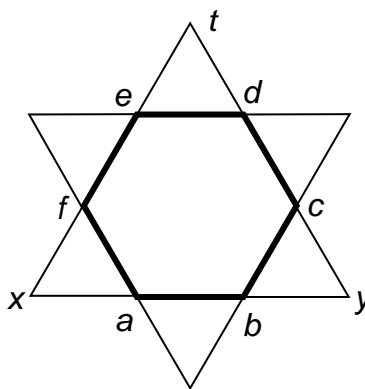
6) ¿En qué polígono regular el ángulo exterior es $\frac{1}{5}$ del ángulo interior adyacente a él?

- 7) Si contestas afirmativamente las siguientes preguntas, agrega cuántos lados tiene el polígono regular en ese caso:
- a) ¿Puede ser 45° la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
 - b) ¿Puede ser 100° la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
 - c) ¿Puede ser 140° la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
 - d) ¿Puede ser 60° la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
 - e) ¿Puede ser 135° la medida de un ángulo interior de un polígono regular?
 - f) ¿Puede ser 156° la medida de un ángulo interior de un polígono regular?

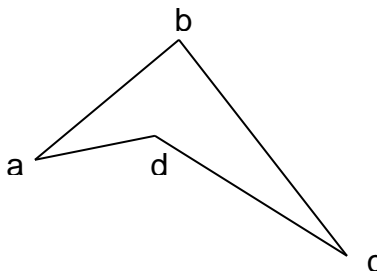
- 8) Sea el hexágono regular

de la figura $abcdef$.

Demuestra que $\triangle xyt$ es equilátero.



- 9) Demuestra que el cuadrilátero $abcd$, la suma de los ángulos \hat{a} , \hat{b} y \hat{c} es igual al ángulo convexo \hat{d} .



La revisión y actualización de este apunte estuvo a cargo de los profesores: Verónica Filotti y María del Luján Martínez

Bibliografía:

- GEOMETRÍA METRICA- RELACIONES MÉTRICAS de Susana S. de Hinrichsen, Noemí B. de González Beltrán y Liliana L de Cattaneo
- TRIGONOMETRÍA de Juan Carlos Bue, Daniela Candio, Verónica Filotti, Noemí Lagreca y Ma. del Luján Martínez. Impreso por Recursos del IPS
- TRIGONOMETRÍA de : A. Nassini ,L de Cattaneo y N. Buschiazzo.
- MATEMATICA 1 (9ª Edición) de Ana M. Bogani, Elsa Di Estévez y Mary G. Oharriz. Editorial Plus Ultra. Año 1995
- Carpeta de Matemática 8 (1ª edición)de Garaventa, Legorburu, Rodas y Turano. Editorial Aique. Año 2001